المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم العالي
جامعة أم القرى
كلية العلوم التطبيقية
قسم العلوم الرياضية



الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام برنامج المبل

NUMERICAL SOLUTION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MAPLE V

إعداد الطالبة
عيدة عبيد حسن الزهراني

إشراف الدكتور
أحمد صديق الفلالي

بحث مكمل لنيل درجة الماجستير في العلوم الرياضية
مقدم لقسم العلوم الرياضية

١٤١٩هـ - ١٩٩٨ م

إجازة أطروحة علمية في صيغتها النهائية بعد إجراء التعديلات المطلوبة

الإسم : (رباعي) عيدة عبيد حسن الزهراني **الكلية :** العلوم التطبيقية

القسم : العلوم الرياضية **التخصص:** رياضيات تطبيقية (تحليل عددي)

الأطروحة مقدمة لنيل درجة : الماجستير

عنوان الأطروحة : الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام برنامج المبل .

****

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين ... وبعد

فبناء على توصية اللجنة المكونة لمناقشة الأطروحة المذكورة عاليه والتي تمت مناقشتها بتاريخ ١٤١٩/٢/٢٢هـ بقبول الأطروحة بعد إجراء التعديلات المطلوبة وحيث قد تم اللازم فإن اللجنة توصي بإجازة الأطروحة في صيغتها النهائية المرفقة كمتطلب تكميلي للدرجة العلمية المذكورة أعلاه .

والله الموفق ،،

أعضاء اللجنة

المشرف	مناقش من داخل القسم	مناقش من خارج القسم
د/ أحمد صديق القلالي	د/ كمال محمد حميده	د/ محمد سعيد حموده
التوقيع :	التوقيع :	التوقيع :

يعتمد ،،،

رئيس قسم العلوم الرياضية

د. عبدالفتاح قاري بخاري

يوضع هذا النموذج أمام الصفحة المقابلة لصفحة عنوان الأطروحة في كل نسخة من الرسالة

****

بسم الله الرحمن الرحيم

الإهداء

إلى من أمر ربي بخفض الجناح لهما . . .

إلى والدي الكريمين

اللذين أستمد التوفيق من رضاهما . . .

إلى من بمساعدته وعونه بعد الله ذلل لي الصعاب . . .

إلى زوجي العزيز

إلى من أهديهم ثمرة جهدي لعلهم يتجاوزون عن تقصيري . . .

إلى بناتي الصغيرات

شكر و تقدير

اشكر الله سبحانه وتعالى الذي قال (إن مع العسر يسرا) لما يسر لي من عمل وبارك لي في الوقت و الهمم . . .

شكر وتقدير لمنسوبي جامعة أم القرى بوجه عام ، وبوجه خاص لمنسوبي قسم العلوم الرياضية . . .

شكر وتقدير لمشرفي الدكتور أحمد صديق فلالي وللمناقش الخارجي الدكتور محمد سعيد حمودة و المناقش الداخلي الدكتور كمال محمد حميدة . . .

شكر خاص للدكتور عبد الله أحمد عبد الله و الدكتور بخيت المطرفي . . .

شكر وتقدير لمنسوبي الرئاسة العامة لتعليم البنات الذين أتاحوا لي فرصة الابتعاث الداخلي . . .

شكر خاص للدكتور الشيخ عبد الملك بن عبد الله بن دهيش ، و الدكتور محمد بن عبد الكريم بن عبيد ، عرفان لهما بالجميل . . .

شكر خاص للمديرة الفاضلة سعاد عايش المرزوقي ، و لكل من ساعدني في هذه الرسالة بالمراجع أو بالكلمة الطيبة أو الدعوة الخيرة . . .

و أخيراً شكري العميق لكل من مد لي يد العون من قريب أو بعيد . فلعلي أستطيع رد جميل الوطن الحبيب . . .

ملخص لبحث الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية

باستخدام برنامج الميل

يقدم هذا البحث دراسة حول مدى إمكانية الاستفادة من البرمجيات الحديثة في المجال الرياضي ، ولقد تم تجربة عدد من البرمجيات مثل (Eureka , Mathcad , Mathmatica , Maple v) واختير البرنامج الرياضي Maple v كموضوع للمقارنة بينه وبين اللغات التقليدية المتمثلة بلغة الفورتران التي تعتبر من اللغات القديمة التي خدمت بجدارة في المجال الرياضي العددي .

مسائل ستيفان (Stefan) تعتبر من المسائل التطبيقية الهامة في مجالات الحياة المختلفة ، والتي يمكن أن تحل بإحدى طرق العناصر المحددة أو الفروق المحددة ، ولقد اختير منها مسألة التوصيل الحراري (One phase) في بعدين والمعتمدة على الزمن ، وصيغت هذه المسألة بطريقة العناصر المحددة باستخدام طريقة (Galerkin) تحت شروط حدية وابتدائية معينة .

أدت طريقة العناصر المحددة إلى تكوين نظام خطي من المعادلات الجبرية التي تم حلها بالطرق المباشرة مثل (Gaussian elimination) أو الطرق التكرارية مثل (Gausses Seidal, Successive over -relaxation (S.O.R) ,Conjugate gradient) .

اعتمدت الدراسة على عرض مميزات المبل وقدراته بالإضافة إلى إمكانية برمجة مسألة البحث بلغته الخاصة ، وعلى ضوء النتائج العددية تمت المقارنة بين برنامجي الفورتران والمبل من حيث السرعة والدقة .

وجدنا من الدراسة تفوق المبل على الفورتران من حيث سهولة استخدامه وقدرته الهائلة في التعامل مع العمليات والرسومات الرياضية وإمكانية استخدامه لحلول بعض أنواع المعادلات التفاضلية عددياً ورمزياً ، وذلك كله بأوامر سهلة أو برامج فرعية مجهزة مسبقاً ، هذا بالإضافة إلى لغته القادرة على البرمجة ولكن بالمقابل نجد تفوق الفورتران عليه في السرعة وفي إمكانية تشغيله من خارج البرنامج ، ونترك للباحث في المجال العلمي حرية الاختيار تبعاً لطبيعة دراسته .

الباحثة	المشرف	عميد الكلية
عيدة عبيد الزهراني	د.أحمد صديق الفلالي	د.عيسى محمد رواس

المحتويات

الفصل الأول

مقــــدمة

INTRODUCTION

مقدمة

إن استخدام الحاسب الآلي في العلوم الرياضية وخاصة في مجال التحليل العددي من الأمور الهامة لتوفير الوقت وتقليل الجهد بالنسبة للمستخدم ، وتعتبر لغة الفورتران من اللغات التقليدية القديمة ذات المستوى العالي والتي مازالت تخدم في المجال الرياضي ، ولكن من عيوب هذه اللغة الصعوبة وارتباطها بالناحية العددية ، وانحصارها في طبقة معينة من المستخدمين ذوي الخبرة ، وظهرت كثير من البرمجيات الحديثة بصور مختلفة ، وتم اختيار هذا البحث ليشكل دراسة حول مدى إمكانية استخدام برنامج حديث يمكن أن يقوم بما تقوم به هذه اللغة القديمة ، وهل يمكن في حالة إثبات كفاءتة الاستغناء عنها ، وقد وقع الاختيار على برنامج (Maple v) وذلك لتميزه بالسهولة التي جعلته شائعاً في كثير من الدول بالإضافة إلى إمكانياته الأخرى في التعامل مع الرموز والرسومات وقد تم عرض هذه المميزات في الفصل الثالث .

اختير من مسائل الحدود المتحركه (Moving boundary) والتي يطلق عليها مسائل ستيفان مسألة التوصيل الحراري في (One phase) والمرتبطة بالزمن في بعدين كعينة اختبار ، وصيغت المسألة بطريقة العناصر المحددة وذلك باستخدام طريقة (Galerkin) ذات التقريب الجيد ، وهذا ما تم عرضه في الفصل الرابع ، وقد تم وضع عرض مبسط لطريقتي الفروق المحددة والعناصر المحددة والفرق بينهما في الفصل الثاني مع عرض للبرمجيات الحديثة الملحقة بالفورتران .

إن استخدام طريقة العناصر المحددة وبعض طرق الفروق المحددة يؤدي إلى تكوين نظام خطي من المعادلات الجبرية يمكن حله بطرق تكرارية أو مباشرة حيث سنتعرض لها في الفصل الخامس ، أما في الفصل السادس فقد تم عرض النتائج والرسومات الخاصة بهذه المسألة مع عقد المقارنة بين البرنامجين وطرح بعض التوصيات.

الفصل الثاني

بعض الطرق العددية لحل مسائل ستيفان

Some numerical methods for solving Stefan problems

٢-١ مـقـدمـة

تعتبر المعادلات التفاضلية من الموضوعات الهامة التي شغلت كثير من علماء الرياضيات نتيجة ارتباطها بمسائل متعلقة بمجالات الحياة المختلفة مثل المجالات الهندسية أو الصناعية أو الطبية وغير ذلك من النواحي التطبيقية ، ونتيجة لذلك ظهرت الكثير من النظريات والدراسات العلمية التي تبحث في حلول هذه المعادلات إما بشكل عددي أو تحليلي، ونجد أن حلول هذه المعادلات لا بد أن تحقق شروط حدية معينة في محيط النطاق الذي يحكمها مثل مسائل القيم الحدية (Boundary value problems) التي قسمت إلى نوعين :-

النوع الأول : مسائل الحدود الحرة (Free-boundary problems)

النوع الثاني : مسائل الحدود المتحركة (Moving - boundary problems)

ويفرق Crank (1984) بين هذين النوعين من المسائل حيث جعل مسائل النوع الأول ترتبط بحل المعادلات التفاضلية الجزئية المسماة بالمعادلات الناقصية (Elliptic equations) التي تكون مصاحبة لمسائل الحالات المستقرة (Steady-state problems) أما مسائل النوع الثاني فترتبط بحل المعادلات التفاضلية الجزئية المسماة بالمعادلات المكافئة (Parabolic equations) مثل معادلات الانتشار (Diffusion equations) التي تظهر في التوصيل الحراري (Heat conduction) ، ونضيف إلي قوله إنه يمكن أن يرتبط هذا النوع بالمعادلات الزائدية (Hyperbolic equations) ويذكر في كتابه أن مسائل النوع الثاني غالباً ما تسمى بمسائل ستيفان (Stefan problems) نسبة إلى العالم J.Stefan حوالي عام (1890) والذي اهتم بدراسة انصهار الجليد ، ونجد في هذا المرجع الكثير من الموضوعات الهامة المتعلقة بمسائل الحدود الحرة والمتحركة وقد تجلت أهمية النوع الثاني من المسائل لارتباطها بالحرارة التي ارتبطت بنواحي تطبيقية هامة مثل صناعة المعادن والزجاج وعملية تجميد الأغذية أو إذابة الثلج عنها وأيضاً في عملية إنتاج الثلج أو تشكيله على سطوح معينة ، وقدم Hill (1987) الكثير من الموضوعات الهامة والمرتبطة بمسائل ستيفان في بعد واحد ، وتعطى الصورة العامة لمسألة ستيفان بالصورة التالية :

$$C_i \frac{\partial u}{\partial t} = div(K_i \, grad \, u) \qquad in \quad D_i \qquad (2.1.1)$$

الموضوعة لشروط حدية ثابتة (Fixed boundary condition)

$$u(x,t) = g(x,t) \qquad on \quad \Gamma_1$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x,t) = 0 \qquad on \quad \Gamma_2$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x,t) = -P_i u(x,t) + q_i(x,t) \qquad on \quad \Gamma_3$$

والشروط الابتدائية (Initial condition)

$$u(x,0) = u_0 \quad in \quad D$$

حيث

$$C_i = c_i \rho_i$$

c_i السعة الحرارية (Heat capacity) ، ρ_i الكثافة (Density) ، K_i معـــامل التــــوصيل الـــحراري (Thermal conductivity) ، u تمثل التوزيـــع الحراري (Temperature distribution) ، q_i (Heat flux) ، ومن الدراسات الهامة التي أجريت في مسائل ستيفان الدراسات التي أقيمت حول إمكانية علاج الأورام بالتبريد في المجال الطبي وقدم Alfelali (1988) دراسة عدديـــة لهـــذه المسألة باستخـــدام الكمبيوتر الشخصي .

هـــذه المسألة افترضت من قبل Comini & Del Guidice(1976) حـــول تطبيـــق العـــلاج بالتبريد لعلاج ورم كبير في رضيع باستخدام جهاز تبريد أسطواني الرأس (Disk-shaped probe) وقامـــا بدراسة للمنطقة المحيطة بالورم والموجودة على مساحة من الرأس قريبة من المـــخ أثنـــاء إزالته والصيغة التي استخدمها الفلالي في دراسته العددية لهذه الحالة كانت على الصورة التالية :

$$C_{ir}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(K_{ir}\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(K_{ir}\frac{\partial u}{\partial y}) + Q_{mr} + M_{br}\ C_{br}(u_b - u) \quad in \quad D \qquad (2.1.2)$$

$$u(x,y,t) = g(x,y) < 0 \quad on \quad \Gamma_1 \quad ,t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t) = 0 \quad on \quad \Gamma_2 \quad ,t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t) = \alpha(u - u_b) \quad on \quad \Gamma_3 \quad ,t > 0$$

والشروط الابتدائية

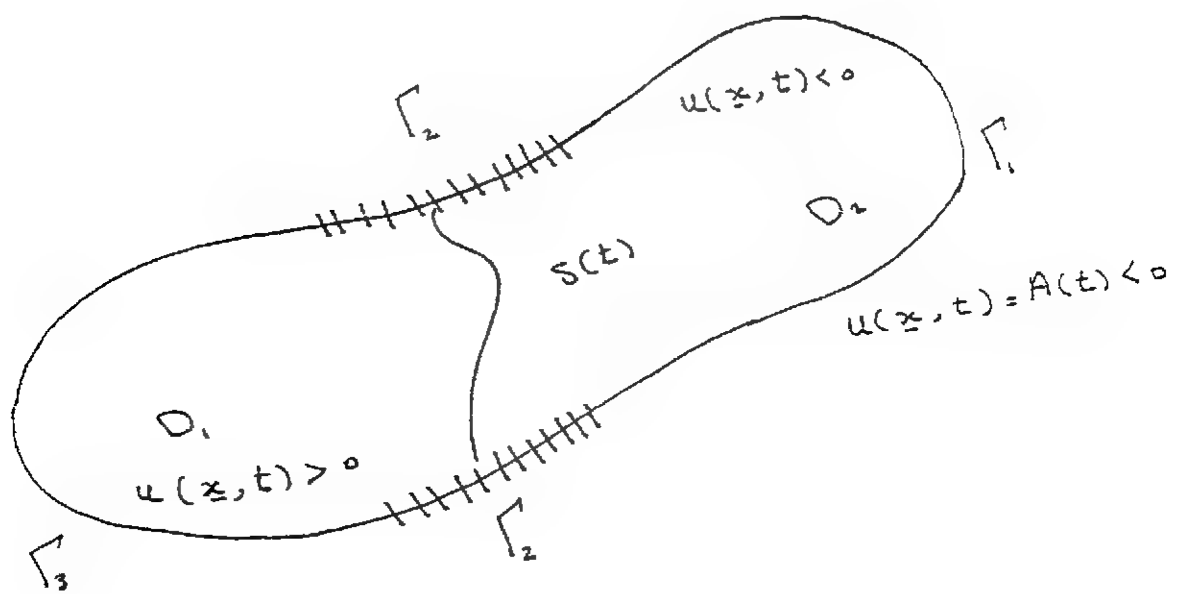
$$u(x,y,0) = u_0(x,y) > 0 \quad on \quad D$$

والشكل (٢-١) يوضح ذلك ، حيث أن :

α معامل تحويل الانتقال الحراري (Convective heat transfer)

Q_{mr} (Metabolic heat generation) ، u_b درجات حرارة الدم (Blood temperature)

M_{br} (Blood perfusion)



Γ_2
$u(\underline{x},t)<0$
Γ_1
D_2
$S(t)$
$u(\underline{x},t)=A(t)<0$
D_1
$u(\underline{x},t)>0$
Γ_2
Γ_3

الشكل (٢-١)

٢-٢ طرق حل المعادلات التفاضلية

٢-٢-١- طرق الفروق المحددة (Finite Difference Methods)

طبقت هذه الطريقة في المعادلات التفاضلية العادية والجزئية لمسائل القيم الحدية ، وتعتبر من إحدى الطرق التكرارية الشائعة الاستخدام ، وتتمثل في استبدال حدود الاشتقاقات الجزئية بما يناظرها من تقريبات الفروق المحددة ، وتعتمد التحويلات في الفروق المحددة للمعادلات التفاضلية الجزئية على الشروط الحدية الخاصة بها والتي يمكن تقسيمها إلى الأنواع التالية :

شرط نويمن الحدي (Neumann boundary condition) $\frac{\partial T}{\partial n} = j(s)$

شرط دريشلت الحدي (Dirichelt boundary condition) $T = g(s)$

الشروط المختلطة (Mixed boundary conditions) $\frac{\partial T}{\partial n} + \sigma(s)T = h(s)$

ويتطلب الحل تقسيم نطاق المسألة إلى شبكة (Grid Or Mesh-Net) مكونة من مجموعة مستطيلات أو مربعات ، وقد تكون الشبكة منتظمة أو محاطة بمنحنى ، وكلما كانت التقسيمات صغيرة كلما كانت النتيجة أدق . وتطبق طريقة الفروق المحددة في كل من المسائل الخطية (Linear) أو غير الخطية (Non linear) وتطبيق هذه الطريقة يستلزم حل نظام من المعادلات الجبرية الخطية في حالة المسألة خطية ، وحل معادلات جبرية غير خطية في حالة كون المسألة غير خطية بتقنيات وطرق تكرارية خاصة مثل طريقة نيوتن للنظم غير الخطية . وفي دراسة المسائل المتعلقة بالحرارة والمعتمدة على الزمن فإن طرق الحل تتخذ إحدى الطريقتين إما :-

١- الطريقة الصريحة (Explicit Method)

وهي الصيغة التي تعطي حلول مباشرة من حدود معرفة بشروط ابتدائية وحدية ، وتستخدم هذه الطريقة تحت الشرط التالي : $0 < r \leq \frac{1}{2}$ حيث أن :

$$r = K\left(\frac{1}{(\delta x)^2} + \frac{1}{(\delta y)^2}\right)\delta t$$

K ، ثابت وتعرف r في حالة (One-dimensional) بالصورة التالية :

$$r = \frac{\delta t}{(\delta x)^2}$$

ويلاحظ أن هذه الطريقة تطبق في حالة مسائل القيم الابتدائية ويندر استخدامها في حالة مسائل القيم الحدية الابتدائية ، وهي أيضاً تحتاج إلى عمليات حسابية كثيرة ناتجة عن صغر قيمة r .

٢- الطريقة الضمنية (Implicit Method)

ترجع هذه الطريقـة إلى كرانك و نكولسون (Crank & Nicolson) وهـي تسـمح لأي قيمة لـ r بشرط ألا تكون كبيرة وتتطلب هذه الطريقة حل (N-1) (M-1) مـن المعـادلات الجـبريـة لكل خطوة ، وبالتالي نجد أنها طريقة مكلفة تحتاج إلى تخزين كبير ووقـت أطـول للحل ، ومن الطرق التكرارية أيضاً (Alternating direction implicit) والتي تعـرف بما يسـمى الاتجاه الضمـني المتردد (A.D.I) ، ويوضح Smith (1978) أن هذه الطريقة اقترحت بواسـطة Peaceman & Rechford (1955) وأن من مميزاتها أنها تقلص الوقت المستخدم بحوالي ٢٥ مرة عن الطرق المباشرة وأقل ٧ مرات من طريقـة Crank-Nicolson ، وتـميز هذه الطريقة بكونهـا متقاربة ومستقرة لكل قيم r .

٢-٢-٢ طريقة العناصر المحددة (Finite Elements Method)

تعتمـد طريقة العناصـر المحددة على تقسيـم النطاق (Region) Ω المحـدد بواسطـة المنحنى المغلق Γ إلى أقسام صغيرة $\Omega^{(e)}$ عناصر (Elements) وتختلف هذه التقسيمات من حيث الشكل ، وتفترض الطريقة بصورة عامة حل تقريبي باستخدام طريقة الحل التجريـبي التقليدي (Classical trial solution) فإذا كان الحـل التـام (Exact solution) هـو T فان الحل التقريبي (Approximation) هو $\tilde{T}$ والذي يمكن كتابته بالصورة التالية

$$T \approx \tilde{T} = \Psi + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m$$

$\{N_m;\ m = 1,\dots,M\}$ يطلـق عليـها اسـم الـدوال التجريبيـة (Trial functions) أو الدوال الأساسية (Basis functions) أو دالة الشكل (Shape function) .

تسمى $a_1, a_2, \dots, a_m$ (Nodal variables) ، وهي تمثل قيم النقـاط على الشكـل، ولابد من الإشارة إلي إن الحل التقريبي المعطى بالصورة السابقة لا بد أن يحقق الشروط الحديـة أي أن $\tilde{T}/\Gamma = T/\Gamma$.

نهدف في الحل لإيجاد قيم a_m وهي قيـم تقريبية ، ونجد أن الدالة التجريبية المعرفة عند كل عنصر تحتوي على كثيرة حدود كاملة من الدرجة P ترتبط بنوعية الإحداثيات المستخدمة وشكل العنصر الذي قد يكون على شكل فترات في البعد الواحد ، أو أشكال رباعية أو مثلثية في الإحداثيات ذات البعدين كما في الشكل (٢-٣) وهناك أيضا أشكال أخرى في حالة الثلاثة

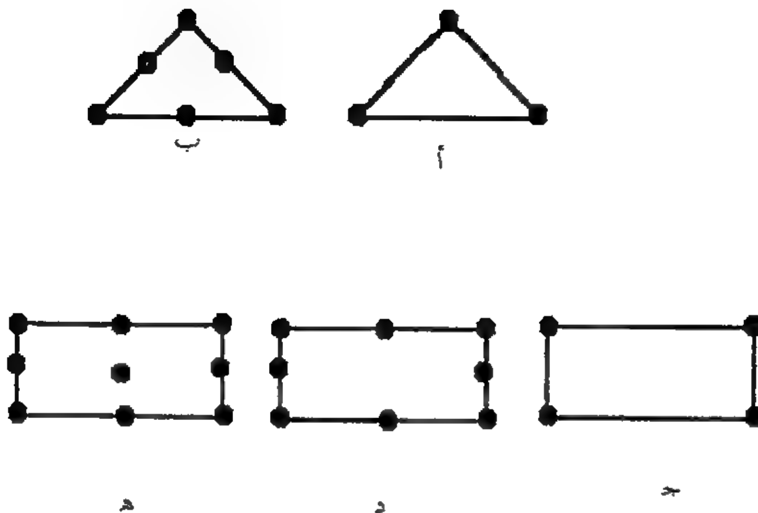
أبعاد وترتبط درجة كثيرة الحدود المستخدمة في شكل الدالة على ما يسمى بدرجات الحرية لهذا العنصر (Degrees of freedom) أو ما يسمى بعائلة لاجرانج (Lagrange family) حيث نجد مثلاً كثيرة حدود من الدرجة الأولى ذات ثلاث حدود مرتبطة بعنصر مثلثي خطي (ذا ثلاث نقاط ممثلة على رؤوس المثلث) كما في الشكل (٢-٣أ) وعلى الصورة :

$$u^e(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \{a_1, a_2, a_3\}$$

وتكــون في حالة الدرجة الثانية تحوي ٦ حدود ترتبط بعنصر مثلثي تربيعي (ذا ستة نقاط ممثلة على المثلث) كما في الشكل (٢-٣ب) وتعطى كثيرة الحدود هذة بالصورة التالية :

$$u^e(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2$$

ويوضـــح Reddy(1985) مثلثي بسكال لتوليـــد مجموعة لاجرانج للعناصر المثـــلثية والرباعيـــة الشكل بصورة تساعد على سهولة التعامل مع كثيرات الحدود بدرجاتها المختلفة .



الشكل (٢-٣)

يورد Zienkiewicz & Morgan(1982) أن اختيار الدوال الأساسية من رتب عليا يعطي تقريب أفضل للحل ، ونحن عادة نختار طرق الحل العالية الدقة والأقل تكلفة ولكن يلاحظ في طريقة العناصر المحددة أن الرتب العليا تظهر أكثر ثمناً رغم دقتها . ويذكر أيضاً أنه بداخل أي عنصر نجد أن الحد الأعلى للخطأ E في التقريب يحقق ($E=O(h^{p+1})$ حيث h أعلى قيمة تصل بين $\Delta y, \Delta x$ في العنصر ، ولا نجد دائماً أن المجال يكون شكل منتظم ، ولكن نجد أحياناً أن النطاق المدروس قد يكون منحرف أو مشوه ، ومن هذا المنطلق استخدمت الإحداثيات المحلية (Local) والتي بها تتحول الإحداثيات المعروفة في x,y (Global) في الشكل المشوه إلى إحداثيات محلية خاصة لكل عنصر بدلالة ζ, η ترتبط بشكل الدالة وهناك علاقة تربط بين هذين النوعين من الإحداثيات تعطى بالصورة :

$$x = f_1(\zeta,\eta),$$
$$-1 \le \zeta, \eta \le 1$$
$$y = f_2(\zeta,\eta),$$

فنجد مثلا إنه في العنصر الرباعي تعطى كثيرة الحدود بالصورة الكارتيزية بالشكل :

$$\overset{(e)}{u}(x,y) = [1 \quad x \quad y \quad xy]\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

وتعطى بالصورة المحلية بالشكل التالي :

$$\overset{(e)}{u}(x,y) = N\delta = \frac{1}{4}[(1-\zeta)(1-\eta) \quad (1+\zeta)(1-\eta) \quad (1+\zeta)(1+\eta) \quad (1-\zeta)(1+\eta)] \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}$$

حيث

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial \zeta} \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{2}{b}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

ولقد اعتمدت الصيغ الحسابية للعناصر المحددة على الطريقة التقليدية المسماة بطريقة الاختلاف التقليدي (Classical variational method) والتي تستخدم فقط في حالة وجود (Functional) مناسبة ، وأدى عدم إمكانية إيجاد (Functional) بالإضافة إلى عدم إمكانية تطبيقها إلا في حالة المعادلات الناقصية إلى إيجاد طرق أخرى تسمى طريقة الباقي الموزون (Weighted residual method) ، ويعرف الخطأ (Residual) R_Ω (كدالة موضع في Ω) على أنه :

$$R_\Omega = T - \tilde{T}$$

ونحاول تقليصه فوق Ω بطرق مختلفة ليصبح مساوي للصفر وذلك يتطلب عدد من التكاملات للخطأ فوق Ω ويتطلب هذا وجود دالة وزنية (Weighting function) ليصبح

مساويا للصفر ، وأدى هذا إلى ظهور عدة طرق اعتمدت على اختيار الدالة الوزنية نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر :

1- Point Collocation

$W_l = \delta (x-x_l)$ وتعطى فيها الدالة الوزنية بصورة

حيث $\delta(x-x_l)$ هي (Dirac delta function) المعرفة تحت الخصائص التالية :

$$\delta(x-x_l)=0 \quad x \neq x_l$$

$$\delta(x-x_l)=\infty \quad x = x_l$$

$$\int_{x<x_l}^{x>x_l} G(x)\delta(x-x_l)dx = G(x_l)$$

2- Subdomin Collocation

إذا اختيرت الدالة لتحقق

$$W_l = \begin{cases} 0, & x_l < x < x_{l+1} \\ 1, & x < x_l,\ x > x_{l+1} \end{cases}$$

3- Galerkin Method

$W_l = N_l$

أي أن الدالة التجريبية هي نفسها الدالة الوزنية .

يتطلب الحل بطريقة العناصر المحددة (Finite elements) صيغ تكاملية يصعب لتعامل معها تحليلياً في حالات كثيرة ولتكن على الصورة $\int_a^b F(x)dx$ وهذا يتطلب إيجاد دالة P(x) تكون تقريب لـ F(x) وتكاملها بسيط وفي المدى (-1,+1) وهذه هي فكرة التكامل العددي الذي يسمى (Quadrature) بحيث يصبح التكامل السابق بالصورة :

$$\int_{-1}^{1} \hat{F}(\zeta)d(\zeta) = \sum_{i=1}^{n} w_i \hat{F}(\zeta)$$

حيث أن

$$\hat{F}(\zeta) = F(x(\zeta)) \cdot J(\zeta)$$

J تحويل جاكوبي (Jacobian)، وتعطي الكثير من الكتب القيم العددية الخاصة بنقاط جاوس ζ_i وقيم W_i والخاصة (Gauss-legender quadrature) ، وهذه القيم تتضح في Reddy(1985) .

ويعرف المرجع نفسه هذا التكامل في بعدين بالصورة التالية :

$$\int_{\Omega_k^*} F(\zeta,\eta) d\zeta d\eta \approx \sum_{I=1}^{M} \sum_{J=1}^{N} F(\zeta_I, \eta_J) W_I W_J$$

حيث M,N ترمز لعدد النقاط في اتجاه ζ, η، (ζ_I, η_J) ترمز لنقاط جـــاوس ، W_I , W_J دوال الوزن المناظرة لنقاط جاوس ، ويورد Burnett(1987) الكثير من المعلومات عن الدوال الأساسية ونقاط جاوس .

يتطلب حل العناصر المنتهية حل مجموعة معادلات خطية تعطى بالصورة $K\underline{a} = \underline{f}$

حيث (Load vector) $\underline{f} = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ ، K (Stiffness matrix) . وسيتم مناقشة طرق حلها في الفصل الخامس بإذن الله ، والمصفوفة السابقة تعتمد على طريقة ترقيم النقاط في المسألة والتي تساعد على إمكانية وضع المصفوفة بطرق مناسبة تجعل هناك إمكانية للاستفادة من بعض الطرق التي تساعد في تسريع الحل وتقليل عملية التخزين .

يوضح Jennings(1977) طريقة الترقيم المناسبة التي استخدمها (Cuthill-Mckee) التي تعتمد على البدء من أحد الأركان في الترقيم ونبتعد عن النقاط التي يكون عدد النقط المتصلة بها كبير ونقوم بترقيم النقاط المتصلة بها على هذا الأساس ، ثم ترقم النقاط المتصلة بهذه النقطة حسب تزايد الدرجة .

٢-٢-٣ الفرق بين طريقتي الفروق المحددة والعناصر المحددة

يوضح Alfelali (1988) الفرق بين طريقة العناصر المحددة والفروق المحددة بقوله طريقة العناصر المحددة تعتبر أفضل من الفروق المحددة ، في حالة التطبيقات في أشكال هندسية غير منتظمة وفي الشروط الحدية المعقدة ويذكر أن سعر الحسابات فيها مكلفة وتتطلب ذاكرة كبيرة وأيضاً مقاييسها صارمة تضمن الاتزان وعدم التذبذب ، ولكن الفروق المحددة عامةً أسهل في الاستخدام في حالة الأشكال الهندسية المنتظمة والشروط الحدية البسيطة .

٢-٣ البرمجة بلغة الفورتران

إن حلول المعادلات التفاضلية باستخدام الطرق السابقة تستدعي استخدام البرمجة بالحاسب الآلي لتقليل الجهد والوقت للوصول إلى أدق النتائج ومن الطرق المستخدمة في البرمجة طريقة البرمجة بلغة الفورتران ، والفورتران من اللغات القديمة ذات المستوى العالي المستخدمة للدراسات العلمية ، ولقد برمجت معظم طرق التحليل العددي باستخدام هذه اللغة ولا زالت نسخ الفورتران تتطور باستمرار وظهر مصاحب لها (Nag library) والتي تحوي برامج مجهزة تستدعى من خلال برامج الفورتران وأيضاً (Nag graphic) الذي يستخدم في مجال الرسومات ويورد Majaaess & Other (1992) [A] صور أخرى من المكاتب الملحقة بالفورتران مثل :

–ABDPACK (Almost block diagonal package)

–ABBPACK (Almost block bidiagonal package)

مع وصف لطريقة استخدامهما لحل أنظمة خاصة معظمها مكون من (كتل قطرية) (Block diagonal) لمعادلات خطية ، وأيضاً توضح دراسة Majaaess & Others (1992) [B] مقارنة بين برنامج ABDPACK مع برنامج Solve Block حيث وجدوا أن ABDPACK أسرع وأقل تخزين .

الفصل الثالث

البرمجيات الرياضية الحديثة

Modern Mathematical Software

٣ - ١ مقدمة

اتجهت الكثير من الشركات المنتجة لتصنيع برامج أعدت مسبقاً تسمى حزم برمجية (Packages) بطرق مختلفة لتوفير الوقت والجهد للمستخدم ، نتيجة لملاحظة العاملين في مجال البرمجة إن عمل برنامج بإحدى اللغات التقليدية قد يأخذ وقت كبير مقارنة بوقت التنفيذ وكانت هذه البرامج في مجالات شتى . وكان للبرامج الرياضية نصيب في ذلك فلقد عرفت منذ سنوات وتقدمت بشكل هائل حتى أصبحت تتعامل مع الرموز والرسومات الرياضية ذات الأبعاد والإحداثيات المختلفة وأيضاً بالإضافة إلى ما تحتويه من برامج فرعية جاهزة فمنها من يملك لغة لبرمجة المسائل ذات الحلول الخاصة ومن هذه البرامج :

EUREKA - MATHCAD - MACSYMA - MATHMATICA -MAPLE V

وتتمايز هذه البرامج في الجودة من حيث السهولة والسرعة والدقة فيما بينها .

٣-٢ دراسات حول بعض البرامج الجاهزة

تعطي الدراسات التالية صورة واضحة عن بعض البرامج الجاهزة من حيث كفاءة الاستخدام والأفضلية ، حيث تورد Pc Magazine (1996) في العدد الثامن المقالة التالية :

" برنامج ماكسيما 2.1 مدرس رياضيات خاص .

استمرت معركة السيطرة على برمجيات الرياضيات الرمزية بدون حسم ، بين الإصدارة الحالية من برنامج Maple ، وبرنامج Mathematica المتوقع تحديثه في وقت لاحق من هذا العام إلا أن برمجيات أخرى من شركة ماكسيما أنهت هذه المعركة لصالحها بإصدارها Macsyma 2.1 التي تعتبر أول إصدارة موجهة لويندوز 95 يضم برنامج ماكسيما أفضل نظام مساعدة بين برامج الرياضيات الرمزية للأسباب التالية :

أولاً : لأنه يضم ملف ويندوز التقليدي للمساعدة ، لكن بتقنيات حديثة ، فالعديد من الأوامر دعمت بعروض توضيحية وأمثلة عديدة يمكن استخدامها بفعالية لإعطائك دروساً مختصرة في الرياضيات .

ثانياً : لأنه يضم ملف مساعدة تخطيطي مشابه لملف المساعدة الرائد لبرنامج Maple ويضيف برنامج ماكسيما 2.1 إلى ملف المساعدة ، ما يسمى "الناصح بالأفكار الرياضية المفيدة (Math Tip Advisor)" الذي يشرح آلية عمل الوظائف (Functions) ، وقواعد استعمال كل منها .

من الطبيعي أن تركز حزم برامج الرياضيات الرمزية على الصيغ والرموز ، أكثر من تركيزها على تجميع البيانات وتحليلها، وعلى الرغم من ذلك ، فبرنامج ماكسيما يقدم عمليات مثالية لتحليل البيانات عدديا بالإضافة إلى مجموعة جديدة من أدوات تجميع وتحليل البيانات . إلا أن الأداة الأكثر أهمية ، هي محرر البيانات الذي يمكنك من وضع الكائنات (Objects) الشبيهة بالجداول الممتدة ضمن ورقة عمل ماكسيما وبإمكانك استيراد أعمدة البيانات المعدة بهيئة آسكي .

إن الزلة الرئيسية لهذا البرنامج هي عدم إمكانية استيراد ملفات Excel و Lotus 1-2-3 بشكل مباشر ، وكذلك فإن الحلقة المفقودة في هذه الإصدارة هي عدم إمكانية استعمال تقنية ربط وتضمين الكائنات (OLE) لجلب بيانات Excel ، ومن المزايا الإيجابية الهامة لبرنامج ماكسيما 2.1 العدد الكبير، الجديد والمحسن من الوظائف الرياضية ، كوظائف تحليل واتساق المصفوفات ويوفر البرنامج أيضا بالنسبة للفيزيائيين والكيميائيين مجموعة موسعة من وظائف تحليل الأبعاد وقاعدة بيانات للخواص الكيميائية ، لقد تمكن برنامج ماكسيما من التصدي للمنافسة القوية للبرامج الأخرى ، وذلك ببناء برنامج جذاب يضم أشمل حزمة مساعدة من نوعها " .

أيضا تبتدئ (1997) Pc Magazine في عددها الخامس المقالة التالية بقولها " ماثيماتيكا .. برنامج رياضيات ذكي ..

مع ماثيماتيكا 3.0، تستطيع أن تحل أكثر المسائل الرياضية تعقيدا ، تستحق شركة Wolfram Research الثناء على برنامجها المميز Mathematica الذي طرحت الإصدار منه حديثا ، للعمل في ظل ويندوز . ويسمح البرنامج بإيجاد حلول رمزية لكثير من المسائل الرياضية بالإضافة إلى إمكانيات متقدمة في الرسم البياني، وإنتاج وثائق رياضية ، تتضمن النصوص والمعادلات والرموز الرياضية والرسومات . يتوفر نسخ من البرنامج لنظم ماكنتوش وويندوز 95 وويندوز إن تي ومجموعة متنوعة من نظم يونيكس . ويتفوق "ماثيماتيكا" 3.0 على أقرانه من برامج الرياضيات الرمزية (Symbolic) بإتاحة المجال أمام المستخدم لتعريف قوالب (Templates) للتكاملات (Integrals) والقوى (Powers) والدوال (Functions) الأخرى التي تستخدم الرموز ، ويمكن إدخال الرموز الرياضية في المعادلات من خلال لوحة رموز عائمة على الشاشة أو باستخدام لوحة المفاتيح ، عبر مجموعة من اختصارات المفاتيح .

على الرغم من أن برامج الرياضيات الأخرى ، مثل Mathcad و Scientific workplace و Theorist سبقت ماثيماتيكا إلى استخدام لوحات الرموز ، إلا أنه تفوق عليها في عدة نقاط مهمة ، فيمكن نسخ النتائج إلى الحافظة ، ولصقها في وثائق أو برامج أخرى ويمكن من ناحية ثانية ، التبديل بين نمط الكتابة باللغة الإنجليزية ، ونمط كتابة الرموز الطبيعية ، في أي وقت . بالإضافة إلى أنه يوفر مجموعة ضخمة من الدوال والتقنيات الرياضية .

يمكن للمستخدم تعديل لوحات رموز ماثيماتيكا وتكييفها حسب حاجته . فيستطيع مثلاً أن يعرف أزراراً يؤدي النقر عليها إلى إدخال بعض الرموز الخاصة أو القوالب ، أو العلاقات الرياضية ، أو تنفيذ عمليات بسيطة بل وحتى تنفيذ برامج ماثيماتيكا كاملة ويتضمن البرنامج أكثر من 700 رمز رياضي ، وتدعم صفحة المحارف الموحدة Unicode مما يسمح باستخدامه مع الأبجديات غير اللاتينية ، وعلى الرغم من أن الواجهة الجديدة لماثيماتيكا تعد تطوراً كبيراً بالنسبة للواجهات المستخدمة الحالية ، إلا أنها لا تخلو من بعض العيوب ، فالطريقة التي يستخدمها لإنشاء وتعديل لوحات الرموز صعبة وعقيمة ، كما أن النوافذ الكثيرة المبعثرة على الشاشة قد تربك المستخدم . ومقابل هذه السلبيات يقارب البرنامج بواجهة استخدامه الشبيهة بالمفكرات الورقية ، وبرامج النشر المكتبي ، بدءاً من وظائف معالجة الكلمات ، التي يمكن الوصول إليها من صفحات الأنماط (Style Sheets) وانتهاء بإمكانيات التلوين التي يتفوق فيها على مايكروسوفت وورد . ويمكن تخزين وثائق البرنامج التي يدعوها "مفكرات" (Notebook) بهيئة HTML أو Tex ، ولكن تخزين المفكرات بهيئة HTML يؤدي إلى تحويل المعادلات الرياضية إلى رسومات GIF مما يضعف إمكانيات نسخها ولصقها في برامج أخرى . ويعتبر الرياضيون حساب التكاملات غير المحدودة ، فناً وعلماً في آن واحد ، والتطور الكبير في الإصدارة الجديدة من ماثيماتيكا هو قدرته على حل جميع التكاملات الموجودة في جدول Grashteyn & Rhyzshik والبالغ عددها 2190 تكاملاً ، بينما كانت تستطيع الإصدارة 2.2 أن تحل 78% منها فقط . واستخدم ماثماتيكا عدداً من الخوارزميات ، التي ابتكر بعضها حديثاً ، لحل التكاملات غير المحدودة والمجاميع .

وتتضمن التطورات التي أتى بها البرنامج خوارزمية LU الرقمية لحسابات المصفوفات ، وحل تكاملات Fresnel ، ودوال Mathieu ، ودعم الأرقام الجبرية ، ولكن التطور الأكثر وضوحاً للعيان هو السرعة الكبيرة التي يعمل بها البرنامج . فقد استطاع ماثيماتيكا أن يجد القيم الذاتية (Eignvalues) لمصفوفة أبعادها 50 x 50 في أقل من ثانية واحدة ، بينما استغرق Maple v من شركة Waterloo Maple أكثر من ست

دقائــق لحل المسألة ذاتها . ويبقى ماثيماتيكا أدنى من غيره من البرامج المنافســة فيمــا يتعلــق بتبســيط المعادلات الرياضية المعقدة ، فهو لم يستطع مثلا أن يبسط المعــادلة Sqrt(5+2Sqrt(6)) ويبدو أنه أهمل أيضا التطورات الكبيرة التي حدثت في السنوات الأخــيرة في أدوات التطويــر كائنية التوجه . وخلاصة القول أن ماثيماتيكا يتفوق على منافسيه في معظم النقــاط باســتثناء نقاط الضعف البسيطة السابقة ." .

٣-٣ تعريف برنامج المبل (Maple v)

هو برنامج رياضي يتعامل مع العمليــات الحسابية والرموز والأعــداد والرسومات . ويوضح [A] Abell and Braselton (1994) أن المبل من الأنظمة الموثوق بها الفعالــة والمتاحــة للعمل الرياضي بواسطة الكمبيوتر وأنه متاح للتداول منذ حوالي عشر سنوات ، وحوالي مائــة ألف مستخدم له من علماء ومهندسين ورياضيين وطلاب ، وهو ســهل الاســتخدام دقيــق ومتوسع ورغم أنه يتطلب ذاكرة متواضعة في الصغر فهو يحوي حوالي ٢٥٠٠ برنامج فرعي. تميــز المبل بسهولة استخدامه وخاصة أساسياته فقد لا يحتاج تعلمها سوى ساعة أو ســاعات قليلة وحيث أنه يعمل من بيئة الويندوز (windows) تجده سهل الاستخدام حتى علــى طــالب المرحلة المتوسطة فيمكنه أن يحضر شاشة المبل (Maple Window) ويتعلم أساســيات العمليــات الحســابية وأولوياتها بسهولة ، ويجد المستخدم العادي فيــه الكثــير مــن الأوامــر المتعلقــة بالموضوعات الرياضية الهامة مثل :

تبسيط العبارات الرياضية	Simplify an Expression
تفاضل العبارات الرياضية	Differential an Expression
التكامل الغير محدود	Indefinite Integration
التكامل المحدود	definite Integration
حل مجموعة معادلات في مجموعة مجاهيل	Solve set of equations for a set of Unknowns
حساب المجموع	Computing Sums
رسم دالة مفردة	Plot of a single function

وغير ذلك سواء عدديا أو رمزيا .

وهذه العمليــات رغم أنها أساسيات للمستخدم إلا أن اللغات التقليدية لا تســتطيع إيجادهــا عدديا إلا بالبرمجة ، بالإضافة إلى عدم قدرتها على التعامل مع الرموز وعلى هذا فإن أساســيات المبل السهلة تقابل جهد ووقت للتعلم والخبرة في اللغات التقليدية مع ما فيها مــن قصــور في الناحية الرمزية .

الأمثلة التالية توضح ذلك:

```
>sin(3*Pi/2)+4*10*cos(Pi);

-41

>sum(i,i=1..112);

6328

>solve(x^3-2*x+1=0);

1,1/2√5-1/2,-1/2-1/2√5

>solve({-10*x+6*y+2*z-4,-6*x-y-10*z+3,-10*x+2*y-6*z+1=0});

{X=21/40,Y=8/5,Z=-7/40}
```

وكما ذكرنا سابقا نجد أن برنامج المبل يتعامل مع الرموز وهي ما تسمىSCG[Symbolic Computation Group] وله قدرة هائلة في ذلك .

الأمثلة التالية توضح ذلك :

```
>diff(x^4*y^2*sin(x),x,y);

8x^3 y sin(x)+2x^4 y cos(x)

>Expand (sin(x-y));

sin(x)cos(y)-cos(x)sin(y);

>int(x*sin(x)^2,x);

x(-1/2cos(x)sin(x)+1/2x)+1/4sin(x)^2-1/4x^2
```

ويتميز المبل بسهولة إيجاد المعلومة أو الأوامر المستخدمة عن طريق البرنامج أو الكتب المرفقة مع البرنامج بسهولة وذلك لتميزه بتصنيف منظم وسهل لمعلوماته الرئيسية والفرعية ، ويحوي المبل موضوعات متعددة يمكن الحصول عليها عن طريق المعلومات داخل البرنامج ذاته ، فنجد بداخله قائمة عن الموضوعات التي يمكن للمستخدم أن يستفيد منها حسب احتياجه ، ويمكن له باستخدام الأمر (with (name of package);) أن يتعرف على جميع البرامج الفرعية المجهزة تحت اسم هذا الموضوع .

إن ميزة تعامله مع الرموز والكم الهائل من البرامج الفرعية الجاهزة تعطي فرصة جيدة لفروع مختلفة في الرياضيات كانت ولا زالت بعيدة كل البعد عن الحاسب باستخدام اللغات

التقليدية ، فيجد دارس الهندسة أو الجبر أو أي قسم آخر الكثير من المتعة والسهولة في التعامل مع الحاسب لحل مشاكله الرياضية .

نستنتج من هنا أنه لم يعد من الضروري أن يبحث غير المتخصص في البرمجة عن تعلم لغة أو اللجوء إلى متخصص في البرمجة لحل مسألة ما في ظل هذا البرنامج الواسع في معظم المجالات الرياضية .

وبعد التوضيح البسيط للبرنامج نلقي الضوء على بعض النقاط التي ذكرت في مقالة Pc Magazine(1997) السابقة ونشير إلى أن الكثير من السلبيات الموجودة في برنامج ماثيماتيكا لا توجد في برنامج المبل ، وأيضا عندما اشير إلى المعادلات الرياضية المعقدة لم توضح طبيعة التعقيد وماهية المعادلات المعقدة إلا انه يتضح من المثال المذكور Sqrt(5+2sqrt(6)) أن التعقيد ليس في المعادلة ولكن في برمجة الحل ، ولقد تمكن المبل من حلها وأعطى الناتج الآتي $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

٣-٤ البرمجة بلغة المبل

بالإضافة إلى ما يحتويه البرنامج من برامج جاهزة فهو يملك لغة قادرة على البرمجة مثله مثل اللغات التقليدية وهذا ما تمكنا من إثباته ببرمجة مسألة البحث .

وبمقارنته بلغة الفورتران نجد أن جميع الأوامر المستخدمة في الفورتران لها نظير في هذا البرنامج ما عدا افتقاره إلى أمر (Go to) وهي تعتبر من الأوامر التي أمكن الاستغناء عنها بطرق متعددة ، وتمكن هذه اللغة من عمل برامج فرعية تسمى (Procedures) وتتميز بإمكانية تعاملها مع المدخلات / المخرجات دون الحاجة إلى تعريف ذلك من خلال القوس الخاص لذلك مقارنة بما يسمى البرامج الفرعية (Subroutines) بلغة الفورتران ، وهي لا تحتاج إلى تعريف (Dimensional) ويستخدم مقابل ذلك (Array) في حالات خاصة لطباعة مصفوفة أو متجه أو من أجل المدخلات لبرنامج فرعي إذا احتيج لذلك .

لا تحتاج المتغيرات في هذه اللغة إلى تعريف كونها صحيحة أو حقيقية ولا تحتاج إلى أمري (stop-end) لإنهاء البرنامج كما في لغة الفورتران ، ويستخدم أمر (stop) للإنهاء الشرطي ولا تحتاج إلى أمر (Return) للعودة من البرنامج الفرعي كما في الفورتران إلا في حالة تحت شرط معين ، ويتميز الفورتران على هذه اللغة بالأوامر الخاصة بالمدخلات (Input) والمخرجات (Output) .

٣-٥ إمكانية عمل مكتبة خاصة للمستخدم

من مميزات المبل إمكانية عمل مكتبة خاصة للمستخدم لتساعده في عدم تكرار البرامج الفرعيـــة التي تستخدم باستمرار لحل مشكلة ما وبالتالي إلى عدم زيادة حجم البرنامج بـــدون داع إلى ذلك ، ووجـــود مكتبة خاصة للمستخدم تسهل له الاستخدام والرجوع إليها مـــتى أراد في الموضوعات التي تخص دراسته أو مسألة بحثه ، وتساعد في حالة وجـــود أكـــثر مـــن مستخدم للجهاز ، بحيث كلا منهم يعرف مكتبته الخاصة ، وأخيرا فإن التعود على اســـتخدام (Packages) يزيد من كفاءة البرنامج وسرعة الاستخدام .

٣-٦ تعامل برنامج المبل مع المعادلات التفاضلية

أولا- المعادلات التفاضلية العادية (Ordinary Differential Equations)

يستطيع المبل حل المعادلات التفاضلية العادية إذا وجد لها حل تحليلي (رمزيا) أو عدديا باستخدام أمر (Dsolve) والذي يستخدم لأنواع متعددة من المعادلات بالإضافة إلى إمكانية وضع خيـــارات لطـــرق الحل مع الأمر الســـابق مع إمكانية رسم معادلـــة الحل حســـب الفـــترة المعطاة ، ويتضح ذلك في المثال الأول والثاني في الملحق [١] .

أيضا استخدام Package (inttrans) يساعد في إيجـــاد حلـــول المعـــادلات باســـتخدام التحـــويلات التكاملية ، ويتمكـــن المبل أيضا من إيجاد الحلـــول الخاصة تحـــــت شـــروط ابتدائـــية أو حدية ، مع قدرته الفائقة على عمل رسومات خاصة للمعادلات التفاضلية وذلـــك من خلال Package(DEtools) ولقد وضح Abell and Braselton(1994)[B] تميـــز المبل في هـــذه النوعية من الرسومات بقولهما " المبل يسمح لنا برسم حلول المعادلات والحقول المرتبطة بها والتي تعتبر مستحيلة بالطرق التقليدية . " ، ويوضح المثال الثالث في ملحق [١] هذه النوعيـــة مـــن الرسومات .

يعتبر المرجع السابق كتاب قيم ومتوسع في التعامل مع المعادلات التفاضليـــة العاديـــة بصورها المختلفة بالإضافة إلى حالات خاصة في المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام المبل .

لقد استخـــدم الباحـــثان Bragg and Cahlon (1994) برنامج المبل لإنتاج تقريبات متتالية ورسومات لحل نوعية من مسائل القيم الابتدائيـــة لمعادلات خطية وغير خطية .

ثانيا– المعادلات التفاضلية الجزئية (Partial Differential Equations)

من المعروف صعوبة حل هذه الأنواع من المعادلات عدديا مع عدم إمكانية ذلك تحليليا إلا في حالات خاصة ، ويتعامل المبل مع هذا النـــوع من المعادلات في نطـــاق ضيـــق لبعـــض الموضـــوعات مثل معادلة الـــمـــوجه في بـــعـــد واحد One-Dimensional Wave Equation أو معادلة الحرارة في بعد واحد أيضا One-Dimensional Heat Equation ، وبهذا تتوقـــف قدرة المبل في العطاء الجاهز حيث تتوقف قدرة المبرمج على إيجاد حلول عامة لمثل هذه المسائل .

يوضـــح (1990)Schryer الصيغة العامة للمعادلات التفاضلية الجزئية في بعـــد واحـــد ويذكر أن لهذه الصورة برامج مجهزة ولكن أحيانا يفاجأ مستخدميها بعجزها لأن هذه الصيغـــة العامة تتوسع في بعض المسائل والتي تستخدم بشكل مكثف في العلوم الفيزيائية.

بهذا يصبح لا غنى عن استخدام لغة معينة لبرمجة المسائل الخاصة ، وبذلك تبقى البرمجـــة الحل الوحيد للمسائل ذات الطابع الخاص كما في مسألة البحث المطروحة وكما ذكرنا ســـابقا أنه أمكن عمل برنامج خاص بها باستخدام لغة المبل وأثبت قدرته على ذلك ، ويتبقـــى لدينـــا معرفة مدى دقته وسرعته في النسخة التي بين أيدينا مقارنة بالفورتران ، وهذا مـــا ســـنطرحه الفصل السادس .

٣–٧ تعامل برنامج المبل مع الرسومات الرياضية

مواضيع رسم الدوال والبيانات الإحصائية هي من الأمور الهامـــة وخاصـــة للأقســـام الرياضيـــة ، ولقـــد استخـــدم لذلك مكتبـــات خاصـــة مثـــل (Nag graphics) المرتبطـــة بالفورتران والتي تخدم مستخدمي هذه اللغـــة . نلاحـــظ أن المبـــل يســـتطيع بالإضافـــة إلى الإمكانيات السابقة أن يكمل العمل الرياضـــي بالرسومات البيانية الفنيـــة ذات التقســـيمات المناسبـــة والألوان المختـــلفة في بعدين أو أكثر وذلـــك بـــأوامر ســـهلة مثـــل (Plot,Plot3d) وباستخدام Package كما ذكرنا سابقا .

يمكن أيضا تعيين نقاط ومنـــحنيات ومضلعات بأوامر تعتبر عامة لمعظم الرســـومات ، ويتعامل المبل مع الإحداثيات الكروية والأسطوانية والقطبية بمثل الدقة التي يتعـــامل بهـــا مـــع الكارتيزية .

٣–٨ تعامل برنامج المبل مع الأعداد

يتميز المبل في تعامله مع الأعداد عن الفورتران بقدرته على القيام بالعمليات الحسابية على الأعداد الكسرية ليعطى ناتجا كسريا بالإضافة إلى تعامله مع الأعداد المركبة بالصورة المعروفة لدينا

$$> \frac{1}{3}+\frac{2}{5};$$

$$\frac{11}{15}$$

$$> (1+I)/(3-2*I);$$

$$\frac{1}{13}+\frac{3}{15}i$$

وتحليل العدد التام (Exact) والعدد المقرب (Approximate) من الأمور الهامة رياضيا ، والعدد المقرب ذو الفاصلة العشرية يسمى (Floating point (decimal) number) ويقسم Corless (1995) Floating point number إلى نوعين :

النوع الأول يسمى Maple Float ويستدعى ببساطة باستخدام الدالة Float بالشكل التالي Float(i,j) التي تعني $i.10^j$

النوع الثاني Floating point number والذي يقسم إلى Hardware Float والتي تستدعى بأمر evalhf و Software Float والتي تستدعى بأمر evalf .

يورد Heal, Hansen, Rickard (1996) " أنة بالرغم أن المبل يتعامل مع الأعداد التامة فانه يستطيع العودة لنا بتقريبات Floating point تصل إلى حوالي 500000 digit في الطول عندما يتطلب ذلك" و Software float تستدعى باستخدام إما أمر Digit ثم تستدعى evalf مثل :

```
> Digits := 20:
> evalf (Pi);
            3.1415926535897932385
```

أو بأمر evalf مباشرة ، مع وضع متغير ثاني يرمز لمقدار الدقة المطلوبة

```
> evalf (Pi,50);
      3.1415926535897932384626433832795028841971693993751
```

وفي حالة التعامل مع أمر evalf بدون تحديد دقة معينة فهو يحدد دقة خاصة بالبرنامج نفسه .

```
> evalf(Pi);
            3.141592654
```

أما مقدار الدقة في Hardware float فتعتمد على نوعية الكمبيوتر ويذكر Corless (1995) أنه يفضل استخدام أمرevalf في حالة إذا كانت الدقة المطلوبة

Digits > evalhf(Digits)

ويذكر لنا Monagan and Others(1996) " إن الحسابات الموضوعة من خلال hardware أسرع من الحسابات المعمولة بتقريبات Floating point في Software وتعتمد على الكمبيوتر ولا يمكن أن تزيد عن دقة الجهاز نفسه.". والبرنامج التالي يوضح ذلك :

```
>st:=time():
>evalhf(sin(exp(gamma+2)+ln(cos(Catalan))));
                                        .09801979012383794
>evalhf_time:=time()-st:
                                        evalhf_time:=.004
st:=time():
evalf(sin(exp(gamma+2)+ln(cos(Catalan))));
                                        .09801978276

>evalf_time:=time()-st:
                                        evalf_time:=.054
```

حيث

$$\text{gamma} \approx 0.5772156649$$

$$\text{Catalan} \approx 0.9159655942$$

حيث

$$\text{gamma} = limit(sum\ (\frac{1}{i}, i = 1,...,n) - \ln\ (n) \qquad , n = \infty$$

$$\text{Catalan} = sum(-1)^{\frac{i}{(2i+1)^2}} \qquad , i = 0,..,\infty$$

يوضح Char and Others(1992) أن استخدام أمر evalf في التقريب في برنامج ما أبطأ بحوالي 500-50 مرة من برنامج مكافئ له بالفورتران وحسابات evalhf أبطأ بحوالي 50-5 مرة من برنامج مكافئ له بالفورتران . ويرجع السبب في ذلك كما يوضح المرجع السابق أنه في لغة الفورتران ترجمة البرنامج إلى لغة الآلة Machine Language تتم مرة واحدة عند تنفيذ البرنامج للمرة الأولى وهذا ما يسمى في لغات البرمجة (Compilation) ، بينما في المبل تتم الترجمة كل مرة ينفذ فيها البرنامج وهذا يسمى (Interpretation) .

الفصل الرابع

تعريـــــف المســــــألـــــة

Problem Definition

٤-١ المسائل المعتمدة على الزمن والمرتبطة بالتحويلات الحرارية

هذه المسائل أخذت جانب هام في النواحي التطبيقية والصيغة العامة لمعـادلات التوصيـل الحراري تعطى بالشكل التالي :

$$\frac{\partial}{\partial x}(K_x \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(K_y \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(K_z \frac{\partial T}{\partial z}) + Q = \frac{\partial}{\partial t}(\rho c T)$$

(4.1.1)

K_x , K_y , K_z معاملات التوصيل الحراري (Thermal conductivity) ، ρ الكثافة (Density)

Q الحرارة المنتجة بالنسبة لوحدة الحجم (Heat generation per unit volume)

C السعة الحرارية (Heat capacity) ، T درجة الحرارة (Temperature)، t الزمن (Time)

وفي حالة ما إذا كانت الدراسة في بعدين فإن $\left(\frac{\partial T}{\partial z} = 0\right)$

وفي حالة الثبات الحراري (Steady state) فان $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$

وتعطى الشروط الحدودية T=T(s) على Γ_s والتي تعين درجة الحرارة على الحدود .

$$K_n \frac{\partial T}{\partial n} + q + h(T - T_r) = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_q$$

تمثل التمدد الحراري الحدي المعين عند نقطة ، حيث q تمثل التمدد الحراري بالنسـبة لوحـدة السطوح (Heat flux per unit surface) ، $h(T - T_r)$ انتـقـال الـحــرارة المفقــودة (Convection heat loss) .

ولقد أثبتت طريقة العناصر المحددة فعاليتها ونجاحها في المسائل المتعلقة بـالزمن ويوضـح Davies(1980) أنه عند استخدام طريقة العناصر المحددة في المسائل المعتمدة على الزمـن فانـه يعامل متغير الزمن عادة بإحدى طريقتين :

١- يفترض الزمن بعد إضافي وتعتبر شكل الدالة (Shape function) المعرفـة في الحل التجريبي

$$U = \sum \Phi^e$$
$$\Phi^e = N^e(x, y, t)\delta^e$$

دالة في البعد والزمن (Space , Time) .

٢- يفترض أن δ^e وهي ما تسمى (Nodal variables) دالة في الزمن أي

$$\Phi^e = N^e(x, y)\delta^e(t)$$

وهذا بالتـالي يؤدي إلى نظـام معادلات تفاضـلية عادية تحل إما باستخـدام الفـروق المحددة أو باستخدام طريقة الباقي الموزون.

٤-٢ حل مسألة التوصيل الحراري

في بحثنا سنقوم بدراسة معادلة التوصيل الحراري الخطي المحكومة في بعدين وذلك من خلال مجال مكون من مادة واحدة (One material region) والصيغة العامة لهذه المسألة تعطى بالصورة:

$$C_1 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(k_1 \frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(k_2 \frac{\partial u}{\partial y}) + f = 0$$

$$\text{in } \Omega \qquad 0 < t \le t_0 \qquad (4.2.1)$$

مع شروط حدية

$$k_1 \frac{\partial u}{\partial x} n_x + k_2 \frac{\partial u}{\partial y} n_y + B(u - u_\infty) + \hat{q} = 0$$

$$\text{on} \quad \Gamma_1 \quad t \ge 0$$

$$u = \ddot{u} \qquad on \qquad \Gamma_2 \qquad t \ge 0$$

وشروط ابتدائية

$u = u_0 \quad in \quad \Omega \quad t = 0$ ، حيث t ترمز للزمن .

الـــدوال $C_1, k_1, k_2, B, u_\infty, \hat{u}, u_0, f \;\; and \;\; \hat{q}$ دوال معطـــاة في(الموضـــع أو/والزمـــــن)

ولقد تم حل هذه المسألة باستخدام صيغة العناصر المحددة (Finite element-formulation)

حيث نفترض الدالة غير المعروفة u هي تقريب للحل يعطى بالصورة:

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{n} n_j(x,y) u_j(t) \qquad (4.2.2)$$

حيث u_j (Nodal variable) وهي دالة في الزمن و n_j (Shape functions) .

باستخدام طريقة (Galerkin) التي تعتبر من الطرق ذات الدقة الجيدة حيث اختيار الدالة الوزنية فيها يعطى بالصورة :

$$w_i = n_i \qquad (4.2.3)$$

وباستخدام طريقة Galerkin في حل المسألة (4.2.1) واستخدام نظرية جرين نجد أن:

$$\int_{\Omega^e} \left(c_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_2 \frac{\partial u}{\partial y}\right) + f \right) n_i dx\, dy \; +$$

$$\oint_{\Gamma_1^{(e)}} [B n_i (u - u_\infty) + n_i q] ds = 0 \qquad (4.2.4)$$

بالتعويض من (4.2.2) في (4.2.4) نجد أن :

$$\sum_{J=1}^{n} \left\{ \left(\int_{\Omega^{(e)}} c_1 n_i n_j dx\ dy \right) \frac{d u_j}{dt} + \left[\int_{\Omega^{(e)}} \left(k_1 \frac{\partial n_i}{\partial x} \frac{\partial n_j}{\partial x} + k_2 \frac{\partial n_i}{\partial y} \frac{\partial n_j}{\partial y} \right) dx\ dy + \int_{\Gamma_1^{(e)}} \beta\ n_i n_j ds \right] u_j \right\}$$
$$- \int_{\Gamma_1^{(e)}} (\beta\ u_\infty - q) n_i\ ds + \int_{\Omega^{(e)}} n_i\ f\ dx\ dy = 0$$

(4.2.5)

ويمكن وضع (4.2.5) في صورة مصفوفات

$$[M]\ \{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \qquad (4.2.6)$$

حيث

$$M = \sum \int_{\Omega^{(e)}} c_1 n_i n_j dx\ dy$$
$$K = \sum \int_{\Omega^{(e)}} \left(k_1 \frac{\partial n_i}{\partial x} \frac{\partial n_j}{\partial x} + k_2 \frac{\partial n_i}{\partial y} \frac{\partial n_j}{\partial y} \right) dx\ dy + \sum \int_{\Gamma_1^{(e)}} \beta\ n_i n_j\ ds$$
$$F = - \int_{\Omega^{(e)}} n_i\ f\ dx\ dy + \beta\ u_\infty \int_{\Gamma_1^{(e)}} n_i\ ds - \int_{\Gamma_1^{(e)}} q\ n_i\ ds \qquad (4.2.7)$$

الطريقة السابقة أدت إلى نظام من معادلات تفاضلية عاديـــة والتي على صـــورة (4.2.6) وهذه يمكن حلها بطريقة الفروق المحددة . هذه الطريقة تستخدم متتالية من خطوات زمنية بطول Δt من المستوى j إلى المستوى j+1 ولذلك ثلاث طرق

1-Backward difference method	طريقة الفروق الخلفية
2-Central difference method	طريقة الفروق المركزية
3-Forward difference method	طريقة الفروق الأمامية

ويوضح Burnett (1987) طريقة θ وهي ما تسمى θ − method كصورة عامة للطـــرق الثلاث السابقة

$$[M]\left\{\frac{du}{dt}\right\}_\theta + [K]\{u\}_\theta = \{F\}_\theta$$

عندما

$$\theta = \frac{t - t_{n-1}}{\Delta t_n}$$
$$\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$$

حيث تعطي بالصورة الآتية :

$$\left[\frac{1}{\Delta t_n}[M]+\theta[K]\right]\{u\}_n \quad =$$

$$(1-\theta)\{F\}_{n-1}+\theta\{F\}_n+\left[\frac{1}{\Delta t_n}[M]-(1-\theta)[K]\right]\{u\}_{n-1} \qquad (4.2.8)$$

وبهذا تحولت مسألة العناصر المنتهية إلى نظام جبري خطي من المعادلات تحل بالطرق المعروفة كما في الفصل التالي. ونجد أن المعادلة (4.2.8) تحتوي الثلاث الطرق السابقة عندما

$\theta = 0$ Forward difference
$\theta = 1/2$ Central difference
$\theta = 1$ Backward difference

وتعطي أيضاً

$\theta = 2/3$ Galerkin scheme

الفصل الخامس

طرق حل المعادلات الخطية

Methods for Solving Linear Equations

٥-١ مقدمة

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية تؤدي إلى نظام خطي من المعادلات الجبرية (Linear system of algebra equations) والتي لها الصورة :

$$A\,\underline{T} = \underline{b} \qquad (5.1.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} T_j = b_i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n \qquad (5.1.2)$$

حيث n عدد المعادلات ، وطرق حل هذا النظام اعتمد على طريقتين أساسيتين هما :

أ- الطرق المباشرة (Direct methods)

وهي طرق أكيدة لإيجاد الحل إن وجد بدون تقريب إلا أنها غير مناسبة إذا كانت مجموعة المعادلات كبيرة جداً .

ب - الطرق غير المباشرة (Indirect methods)

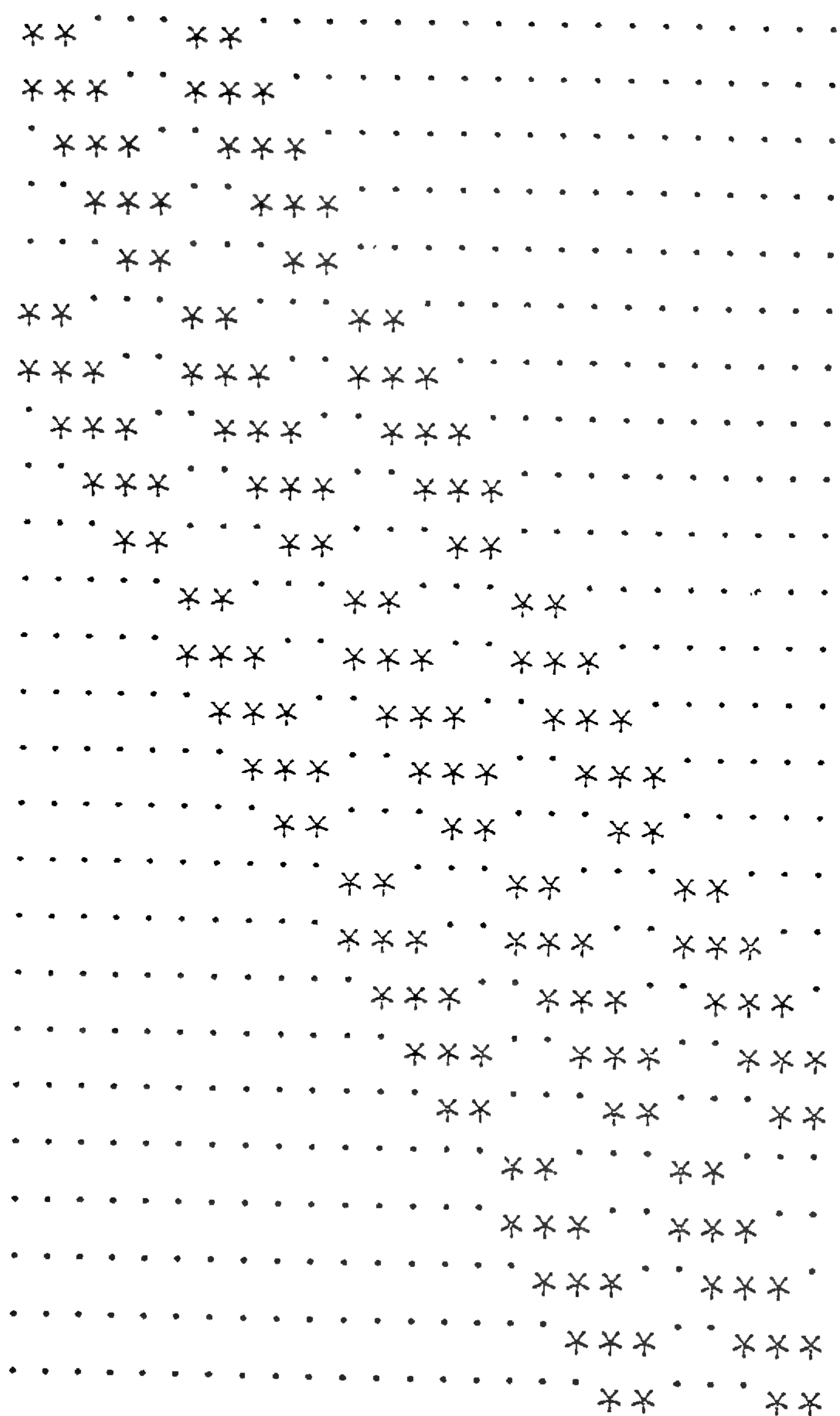
وتسمى أيضاً الطرق التكرارية (Iterative methods) وتفضل في حالة كون عدد المعادلات كبير ويفرق Alfelali(1988) بين هاتين الطريقتين بقوله الطرق المباشرة هي التي تمكنا من الحصول على حل تام بعدد منتهي من العمليات إذا كانت كل الحسابات لا تحمل خطأ دائري ، بينما الطرق التكرارية تتطلب عدد من التكرارات لتقترب من الحل التام .

وقبل الشروع في الحديث عن هذه الطرق نعرض الحقائق التالية :

١- حجم النظام الخطي الناتج باستخدام طريقة العناصر المحددة يعتمد على عدد نقاط تقسيم الشكل المستخدم للحل وبالتالي التقسيم إلى عدد اكبر من النقاط قد ينتج كم هائل من المعادلات .

٢- استخدام ترقيم معين للمسألة يساعد في تجمع العناصر حول القطر الأساسي وجعل بقية العناصر أصفار وذلك عن طريق تقليل نطاق المصفوفة (Band width) كما ذكرنا سابقاً وهذا يمكننا من اختيار طريقة اقتصادية للحل . ويتضح هذا من الشكل (٥-١) الذي يمثل المصفوفة الناتجة من مسألة البحث المعروضة في الفصل السادس .

٣- استخدام طريقة العناصر المحددة في الحل ينتج في كثير من الحالات مصفوفة A من النوع المتماثل وموجب التحديد .



شكل (٥-١)

٥–٢ بعض التعاريف الهامة (Definitions)

١– المصفوفة المتماثلة (Symmetric) :

هي المصفوفة التي تحقق الشرط $A^T = A$ حيث A تساوي المصفوفة المبدلة (Transposed matrix) A^T .

٢– تكون المصفوفة موجبة التحديد (Positive definite) عندما

$$T^T A T > 0$$

$$T \neq 0$$

بشرط

وتسمى بالصورة التربيعية (Quadratic form) والتي تعرف لمتجه حقيقي معطى T ومصفوفة متماثلة حقيقية A بالصورة التالية :

$$\underset{\sim}{T}^T A \underset{\sim}{T} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} T_i T_j$$

٣ – تعريف Spectrum :

مجموعة كل القيم الذاتية للمصفوفة A تسمى Spectrum للمصفوفة ويرمز لها بالرمز $\delta(A)$.

٤– تعرف Spectral radius للمصفوفة A بأنها :

$$\rho(A) = \max_{1 \le i \le n} \{ |\lambda_i| ; \lambda_i \in \delta(A) \}$$

وهي ما تسمى بالقيمة الذاتية الغالبة (ذات اكبر قيمة مطلقة) .

٥–٣ الطرق المباشرة (Direct Methods)

أساس هذه الطرق طريقة الحذف لجاوس (Gaussian elimination) المعروفة بطريقتها التقليدية ، وظهرت عدة طرق مثل طريقة التحليل المثلثي (Triangular desmposition) والتي استخدمت في بعض الحالات الخاصة مثل حالة المصفوفات المتماثلة والموجبة التحديد كما في طريقة شولسكي (Choleski) حيث تحلل A المتماثلة في المعادلة (5.1.1) إلى

$$A=LU \qquad (5.3.1)$$

حيث U تمثل مصفوفة مثلثية علوية (Upper triangular matrix)

L تمثل مصفوفة مثلثية سفلية (Lower triangular matrix)

بوضع

$$L\,U\,\underline{T} = \underline{b} \qquad (5.3.2)$$

وبفرض

$$U\,\underline{T} = \underline{y}$$

تؤول المعادلة (5.3.2) إلى

$$L\,\underline{y} = \underline{b}$$

وتحل بالتعويض الأمامي بالنسبة لـ $\underline{y}$ والتعويض الخلفي بالنسبة لـ $\underline{T}$

ويمكن أيضا تحليل A إلى : LDL^T بحيث تصبح المعادلة (5.1.1)

$$(L\,D\,L^T)\,\underline{T} = \underline{b}$$

حيث D تمثل مصفوفة قطرية تحوي نفس المعاملات القطرية للمصفوفة U ويمكن استخدام طريقة (تحليل شولسكي) (Choleski-Factorization) .

في حالة كون المصفوفة متماثلة وموجبة التحديد فإننا نحلل A إلى $A = \mu^T \mu$.

حيث $\mu^T = LD^{\frac{1}{2}}$ (مصفوفة مثلثية سفلية)

$\mu = D^{\frac{1}{2}}L^T$ (مصفوفة مثلثية علوية)

وبهذا يؤول حل المعادلة (5.1.1) إلى حل المجموعتين المثلثتين

$$\mu\,\underline{T} = \underline{y}$$

$$\mu^T\,\underline{y} = \underline{b}$$

وبهذه الطريقة لا نحتاج إلا لإيجاد قيمة μ وفي المعادلة (5.3.1) احتجنا لإيجاد L, U .

تتضح أهمية هذه الطريقة في حالة مصفوفات النطاق حيث يمكن توفير ذاكرة الحاسب والاقتصاد في العمليات الحسابية ، ويذكر بطرس (١٩٨٢) أن هذه الطريقة من أكفأ الطرق المستخدمة في حل المعادلات الخطية المتماثلة حيث كل ما يجب تخزينه من عناصر μ هي $\frac{1}{2}n^2$ بالإضافة إلى $2n$ عنصر للمتجهين $\underline{b}\,,\underline{y}$. ويتفق هذا مع مقولة Smith (1978) إن الطرق المباشرة تفضل في حالة إمكانية تخزين معاملات المصفوفة بطريقة أسرع من الطرق التكرارية وذلك لدقتها وسرعتها .

يوضح محمد و عدنان (١٩٩٢) إن عدد العمليات الحسابية في طريقة الحذف لجاوس تعطى بالصورة التالية :

أ- في عملية الحذف

$\frac{1}{2}(n+1)n$ عملية قسمة

$\frac{1}{3}(n)(n-1)(n+1)$ عملية ضرب

$\frac{1}{3}(n)(n-1)(n+1)$ عملية طرح

ب- في عملية التعويض الخلفي

$\frac{1}{2}n(n-1)$ عملية ضرب

$\frac{1}{2}n(n-1)$ عملية طرح

ويذكر أنه في حالة كون المصفوفة متماثلة يكفي في هذه الحالة تخزين النصف العلوي أو السفلي فقط مع القطر وبذلك نوفر في أماكن التخزين داخل ذاكرة الحاسب وكذلك في حالة كون المصفوفة محددة موجبة يمكن تقليل العمليات الحسابية المستخدمة في طريقة الحذف لجاوس ومن ثم نضمن دقة أفضل في الحل .

٥-٤ الطرق غير المباشرة (Indirect Methods)

تبتدئ هذه الطرق بتقريب ابتدائي للحل و ليكن $\underline{T}^{(0)}$ ومن ثم توليد متتالية من متجهات الحل $\left\{\underline{T}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ والتي تتقارب إلى $\underline{T}$ وسرعة هذا التقارب تعتمد على اختيار التقريب الأول الذي نبتدئ به الحل .

تتميز هذه الطرق ببساطة العمليات المكون لها وسهولة تنفيذها بالإضافة إلى كونها من الطرق المفيدة في المصفوفات الكبيرة وخاصة في حال كون المصفوفة (Sparse) وهي المصفوفة التي معظم عناصرها أصفار ، حيث تصبح هذه الطريقة من الطرق السريعة الاقتصادية وفيما يلي نعرض بعض الطرق التكرارية الهامة :

٥-٤-١- طريقة جاوس سيدل (Gauss Seidel Method)

ليكن لدينا n من المعادلات فان الطريقة تأخذ الصيغة التالية

$$T_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left\{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, T_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, T_j^{(k)}\right\} \qquad i = 1,2,\ldots\ldots,n \qquad (5.4.1)$$

تحويل $\overset{k}{T}$ إلى $\overset{k+1}{T}$ يمكن وصفه باستخدام المصفوفات L,D,U حيث $A = D + U + L$

بالصورة التالية:

$$\overset{(k+1)}{\underline{T}} = G\overset{(k)}{\underline{T}} + \underline{C} \qquad , \quad K = 0,1,2,\ldots.$$

ونعرف $D = \text{diag}\,(a_{11}, a_{22}, \ldots\ldots, a_{nn})$

$$U = \begin{cases} a_{ij} & i < j \\ 0 & i \geq j \end{cases}$$ (Strictly upper triangular matrix)

$$L = \begin{cases} a_{ij} & i > j \\ 0 & i \leq j \end{cases}$$ (Strictly lower triangular matrix)

حيث أن

$$G = -\,(D+L)^{-1}U$$
$$\underline{C} = (D+L)^{-1}\underline{b}$$

يوضح محمد وعدنان (١٩٩٢) إن العمليات الحسابية في العملية التكرارية الواحدة في طريقة جاوس – سيدل هي

$n(n\text{-}1)$ عملية ضرب

n عملية قسمة

$n(n\text{-}1)$ عملية طرح

ويذكرا " أنه إذا تم التقارب في أقل من $\frac{n}{3}$ تكرارا كان عدد العمليات الحسابية صغيرا بالمقارنة بعدد العمليات الحسابية في طريقة الحذف لجاوس وجاوس جوردان ، ولا سيما إذا كان n كبيرة وبالتالي تكون الطريقة التكرارية لجاوس سيدل مفضلة أما إذا كانت n صغيرة كانت طريقة الحذف أفضل من الطرق التكرارية".

في حال كون المصفوفة من النوع (Sparse) فإن تخزين جميع أصفارها بالطرق السابقة (التقليدية) يحتـــاج إلى حيز كبير في ذاكرة الحاسب لا داعي له وكذلك القيـــام بكثـــير مـــن العمليات الحسابية عليها يصبح أمر غير ضروري ، ولذلك ظهرت طـــرق معـــدلة للطـــرق التقليديـــة لتقـــليل العمليـــات الحسابية ومن ثم تقليل الزمن المســـتخدم ، ويوضـــح المرجـــع السابق الصورة العامة التالية كتعديل لجاوس سيدل لحل مصفوفة النطاق غير ثلاثية الأقطار .

$$X_i = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq w+1}}^{W} a_{ij} x_{i-w+j-1}) / a_{i,w+1} \qquad (5.4.4)$$

$i \quad =1,2,3,\dots\dots, n$

حيث يعرف عرض النطاق (Band width) W للمصفوفة بأنه عدد الأقطار التي تحويها ، w هي عدد الأقطار الجانبية في أي جانب من جانبي القطر الرئيسي .

ويجب تحقيق الشرط التالي :

$$0<i-w+j\leq n$$

٥–٤–٢ طريقة The successive over relaxation

وهي ما تسمى بطريقة (S.O.R) وهي طريقة معدلة لخطوات جاوس سيدل .

$$T_i^{(k+1)} = w(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \overset{(k+1)}{T_j} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \overset{(k)}{T_j}) / a_{ii} + (1-w) \overset{(k)}{T_i} \qquad (5.4.5)$$

$i = 1,\dots.,n$

حيث المعامل w يسمى معامل التسريع (Acceleration parameter)

وتوصف هذه الطريقة باستخدام المصفوفات L,D,U كالتالي :

$$\overset{(k+1)}{\underline{T}} = G \overset{(k)}{\underline{T}} + C \qquad k = 0,1,2,\dots\dots \qquad (5.4.6)$$

حيث

$$G = (I + wD^{-1}L)^{-1}[(1-w)I + wD^{-1}U]$$
$$\underline{C} = (I + wD^{-1}L)^{-1} wD^{-1} \underline{b}$$

ونـــجد أن جاوس سيدل حالة خاصة من S.O.R في حالة $w = 1$ والقيمة المثلى لـــ w متاحة في المدى $0 < w < 2$ وذلك يتضح من النظرية الآتية Fiedler (1986) " الشرط الضروري لطريقة S.O.R كي تتقارب لمتجـــه ابتدائي $\overset{(0)}{\underline{T}}$ ولـــطرف أيمن $\underline{b}$ هو $0 < w < 2$ " .

في حالـــة اســـتخدام صيغـــة S.O.R. لقيـــم $w < 1$ تســـمى هـــذه الطريقـــــة (Under-relaxation) .

٥-٤-٣ الشرط الضروري والكافي لتقارب الطرق التكرارية

الطرق السابقة يمكن أن توضع على الصورة :

$$\underset{-}{\overset{(k+1)}{T}} = G\,\underset{-}{\overset{(k)}{T}} + \underset{-}{C} \qquad (5.4.8)$$

حيث G مصفوفة تكرارية (Iteration matrix)

$\underset{-}{C}$ متجه عمود القيم المعروفة (Column vector)

يعرف الخطأ $\overset{(k)}{e}$ للحل التام بالعلاقة :

$$\underset{-}{\overset{(k)}{e}} = \underset{-}{T} - \underset{-}{\overset{(k)}{T}} \qquad (5.4.9)$$

المتتالية $\underset{-}{\overset{(1)}{T}}, \underset{-}{\overset{(2)}{T}}, \ldots\ldots, \underset{-}{\overset{(k)}{T}}$ سوف تتقارب إلى $\underset{-}{T}$ عندما k تؤول إلى ما لا نهاية إذا كان

$$\lim_{k\to\infty} \underset{-}{\overset{(k)}{e}} = \underset{-}{0} \qquad (5.4.10)$$

حيث أن $\overset{(0)}{e}, \overset{(0)}{T}$ اختيارية .

إذاً التكرارات سوف تتقارب إذا وإذا فقط :

$$\lim_{k\to\infty} G^k = \underset{-}{0} \qquad (5.4.11)$$

وإذا كانت G مصفوفة من الرتبة $(n \times n)$ ولها القيم الذاتية (Eigenvalues) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ فإن التكرارا ت تتقارب بمتجه اختياري ابتدائي $\overset{(0)}{T}$ إذا و إذا فقط القيم الذاتية لـ G تحقق :

$$|\lambda_i| < 1 \qquad i = 1,2,\ldots\ldots,n \qquad (5.4.12)$$

بمعنى آخر سوف يتقارب التكرار باختياري $\overset{(0)}{T}$ إذا وإذا فقط $\rho(G)$ أقل من الواحد

حيث $\rho(G)$ Spectral radius للمصفوفة G .

٥-٤-٤ طريقة (Conjugate gradient)

ارتبطت S.O.R بصعوبة إيجاد تقريب جيد للمعامل ?? لذلك ظهرت طريقة (Conjugate gradient) ويذكر Reid(1971) أنها طورت بواسطة E.Stiefal & by M.R.Hestenes بالمشاركة مع J.B.Rosser , G.Forsyth & L.Paige ، وبين أن هذه الطريقة أخذت اهتمام من بعض العلماء منذ زمن بعيد وقامت دراسات ومقارنات حول هذه الطريقة وطرق أخرى .

يوضح Alfelali (1988) هذه الطريقة كالتالي:

نقطة بداية الاشتقاق تكون بدراسة (Minimizing functional)

$$F(\underline{T}) = \frac{1}{2}\underline{T}^{T} A\underline{T} - \underline{T}^{T}\underline{b} \qquad (5.4.14)$$

حيث A مصفوفة متماثلة وموجبة التحديد وأصغر قيمة لـ F هي : $-\frac{1}{2}\underline{b}^{T} A^{-1} b$

عند $\underline{T} = A^{-1}\underline{b}$

ونجد أن F minimizing وحل $A\underline{T} = \underline{b}$ مسألتين متكافئتين .

ويذكر أنه بمتابعة أعمال Hageman & Young (1981) نحصل على طريقة (Conjugate gradient)

وتوصف هذه الطريقة كالتالي :

إذا افترضنا أن $\overset{(0)}{\underline{T}}$ اختياري وافترض أن التقارب المتتابع للحل $\underline{T}$ يعطى بالعلاقة:

$$\overset{(k+1)}{\underline{T}} = \overset{(k)}{\underline{T}} + \alpha_k \overset{(k)}{\underline{P}} \qquad (5.4.15)$$

حيث (direction vector) $\overset{(k)}{\underline{P}}$ ونعرف الباقي (residual)

$$\overset{(k)}{\underline{r}} = \underline{b} - A\overset{(k)}{\underline{T}} \qquad (5.4.16)$$

$$\overset{(0)}{\underline{P}} = \overset{(0)}{\underline{r}} \qquad (5.4.17)$$

$$\overset{(k)}{\underline{P}} = \overset{(k-1)}{\underline{r}} + \beta_k \overset{(k-1)}{\underline{P}} \qquad k = 1,2...... \qquad (5.4.18)$$

حيث β_k اختيرت لتكون $\overset{(k)}{\underline{P}}$ مرافق $\overset{(k-1)}{\underline{P}}$ بمعنى

$$(\overset{(k)}{\underline{P}}, A\overset{(k-1)}{\underline{P}}) = 0$$

$$\beta_k = -\frac{(\overset{(k)}{\underline{r}}, A\overset{(k-1)}{\underline{P}})}{(\overset{(k-1)}{\underline{P}}, A\overset{(k-1)}{\underline{P}})} \qquad (5.4.19)$$

اختيرت α_k لتكون minimize لـ $\overset{(k)}{\underline{T}} - \alpha_k \overset{(k)}{\underline{P}}$ بالنسبة لـ α فنحصل على

$$\alpha_k = \frac{(\underset{-}{\overset{(k)}{P}}, \underset{-}{\overset{(k)}{r}})}{(\underset{-}{\overset{(k)}{P}}, A \underset{-}{\overset{(k)}{P}})} \qquad (5.4.20)$$

ويذكر أن Hageman & Young (1981) حددا إمكانية تعيين $\alpha_k, \beta_k, r^{(k)}$ كالتالي :

$$\alpha_k = \frac{\left(\underset{-}{\overset{(k)}{r}}, \underset{-}{\overset{(k)}{r}}\right)}{\left(\underset{-}{\overset{(k)}{P}}, A \underset{-}{\overset{(k)}{p}}\right)} \quad ,k = 0,1,2,.... \qquad (5.4.21)$$

$$\beta_k = \frac{\left(\underset{-}{\overset{(k)}{r}}, \underset{-}{\overset{(k)}{r}}\right)}{\left(\underset{-}{\overset{(k-1)}{r}}, \underset{-}{\overset{(k-1)}{r}}\right)} \quad ,k = 1,2.,..... \qquad (5.4.22)$$

$$\underset{-}{\overset{(k)}{r}} = \underset{-}{\overset{(k-1)}{r}} - \alpha_k A \underset{-}{\overset{(k)}{P}} \quad ,k = 1,2,.......$$

ويوضح أن عدد عمليات الضرب الكلية في كل تكرار في حالة إيجاد $A \underset{-}{\overset{(k)}{P}}$ هي n^2 وفي حالة إيجاد الضرب الداخلي هي $2n$ مع ضرورة كون عدد العمليات في الضرب هي نفس عدد العمليات في عملية الجمع .

٥-٥ نتائج متعلقة بعدد التكرارات والزمن

الجدول (٥-١) يوضح الفرق بين الطرق المباشرة (جاوس للحذف) والطرق التكرارية (جاوس سيدل) في برنامجي الفورتران والمبل من ناحية الزمن (مقدراً بالثانية) ، في حالة التعامل مع المصفوفة (Sparse) بالطرق التقليدية أو باستخدام الطرق الخاصة التي تتعامل مع هذه المصفوفات واستخدمنا في ذلك مصفوفة مكونة من (121 X 121) عنصر .

الجدول (٥-٢) يوضح الفرق بين الطرق التكرارية الثلاث (جاوس سيدل -Conjugate gradient– S.O.R) في عدد التكرارات والزمن المستغرق مقدراً بالثانية (Second) لحل مسألة البحث الموضحة في الفصل السادس في المعادلة (6.1.1) والشكل (٦-١) باستخدام الفورتران وبرنامج Maple v . وكذلك الجدول (٥-٣) يوضح الزمن المستغرق لحل مسألة البحث باستخدام الطرق المباشرة (جاوس للحذف) أيضاً باستخدام البرنامجين .

جاوس سيدل		جاوس للحذف		
maple v	Fortran	maple v	Fortran	
82.535	0.1648351648	91.365	0.2747252747	باستخدام الطرق التقليدية
17.365	0.0549450549	32.746	0.1098901098	باستخدام الطرق المعدلة
		23.267		في حالة استدعاء برنامج فرعي جاهز

جدول (٥-١)

عدد التكرارات و الزمن

Conjugate gradient		S.O.R w=1.1		جاوس سيدل		رقم الخطوة
maple v	Fortran	maple v	Fortran	maple v	Fortran	
12	11	10	10	10	10	1
12	11	9	9	10	10	2
12	11	9	9	9	9	3
12	12	9	9	9	9	4
12	11	9	9	9	9	5
10	10	8	8	8	8	6
10	10	8	8	8	8	7
6	6	8	8	8	8	8
10	9	8	8	8	8	9
10	10	8	8	8	8	10
12	11	8	8	9	9	11
12	12	8	8	9	9	12
12	11	9	9	9	9	13
12	12	9	9	9	9	14
12	11	9	9	9	9	15
12	12	9	9	9	9	16
12	11	9	9	9	9	17
12	12	9	9	9	9	18
12	11	9	9	9	9	19
12	12	9	9	9	9	20
52.679	0.219780	42.307	0.164835	43.129	0.164835	الزمن

جدول (٥-٢)

و تستغرق الطرق المباشرة (جاوس للحذف)الزمن التالي

Maple	Fortran
34.492	0.109890

جدول (٥-٣)

الفصل السادس

نتائج وملاحظات

Results & Remarks

٦–١ مقدمة

٦–٢ مثال عددي مع بعض النتائج

٦–٣ النتائج والمقارنة بين برنامجي الفورتران والمبل

٦–٤ بعض التوصيات

٦-١ مقدمة

لقد تم تعديل برنامج Alfelali (1988) الخاص بحل مسألة العلاج بالتبريد بحيث أصبح لحل المثال العددي المطروح في مسألتنا وعدل الحل (One-phase ,two -dimensional problem in one medium) والبرنامج الذي استخدمه الفلالي هو:
(FEMMBP (Finite element method for solving moving boundary problem))
وقمنا بإعادة برمجة المسألة باستخدام برنامج Maple v release 4 .

٦-٢ مثال عددي مع بعض النتائج

المثال العددي التالي من كتاب Reddy (1985) اخذ كعينة اختبار للمقارنة العددية بين برنامجي الفورتران والمبل من حيث السرعة والدقة ، ولقد تم عرض المسألة بصورة عامة في الفصل الرابع ، وأخذنا الحالة الخاصة لمعادلة التوصيل الحراري المعتمدة على الزمن المعطاة بالصورة التالية والموضحة بالشكل (٦-١) .

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^2 T = 1 \qquad in \qquad \Omega = \{(x,y): \;\; 0 < (x,y) < 1\}$$

الموضوعة للشروط الحدية عند $t \geq 0$

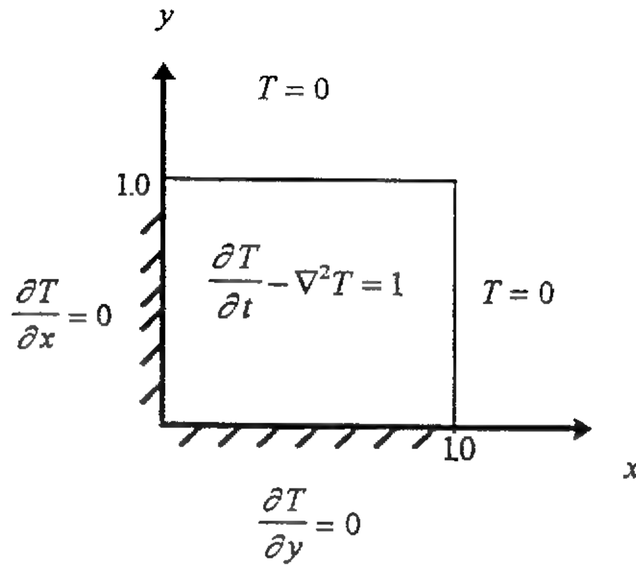
$$T = 0 \qquad on \qquad \Gamma_1 = \{lines \;\; x = 1 \;\; and \;\; y = 1\}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \qquad on \qquad \Gamma_2 = \{lines \;\; x = 0 \;\; and \;\; y = 0\}$$

والشروط الابتدائية لكل $(x,y) \quad in \quad \Omega$

$$T = 0 \qquad t = 0 \tag{6.1.1}$$

حيث t تمثل الزمن ، T تمثل درجة الحرارة



شكل (٦-١) النطاق ، والشروط الحدية للمسألة

لقد تم حل المسألة بطريقة العناصر المحددة وحيث أن الشكل المدروس رباعي منتظم فقد تم تقسيمه إلى 4x4 من العناصر المربعة (Tringular) فاصبح لدينا 16 عنصر ، (Nodal point) 25 ، حيث $\Delta x = 0.25,\ \Delta y = 0.25$ واستخدمنا $\Delta t = 0.05$ ، وتوصلنا للحل عند الزمن t=1.0 بعد 20 خطوة .

يتضح من المعادلة (6.1.1) حسب المعادلة (4.2.1) أن :

$$c_1 = 1.0\ \ , k_1 = k_2 = 1.0, \beta = 0, f = 1.0$$

وتصبح المعادلة (4.2.4) بالشكل التالي :

$$[M]\ \{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \qquad (6.1.2)$$

حيث

$$M = \sum \int_{\Omega^{(e)}} n_i n_j dx\ dy$$

$$K = \sum \int_{\Omega^{(e)}} \left(\frac{\partial n_i}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial x} + \frac{\partial n_i}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial y} \right) dxdy$$

$$F = -\int_{\Omega^{(e)}} n_i \quad dx\ dy$$

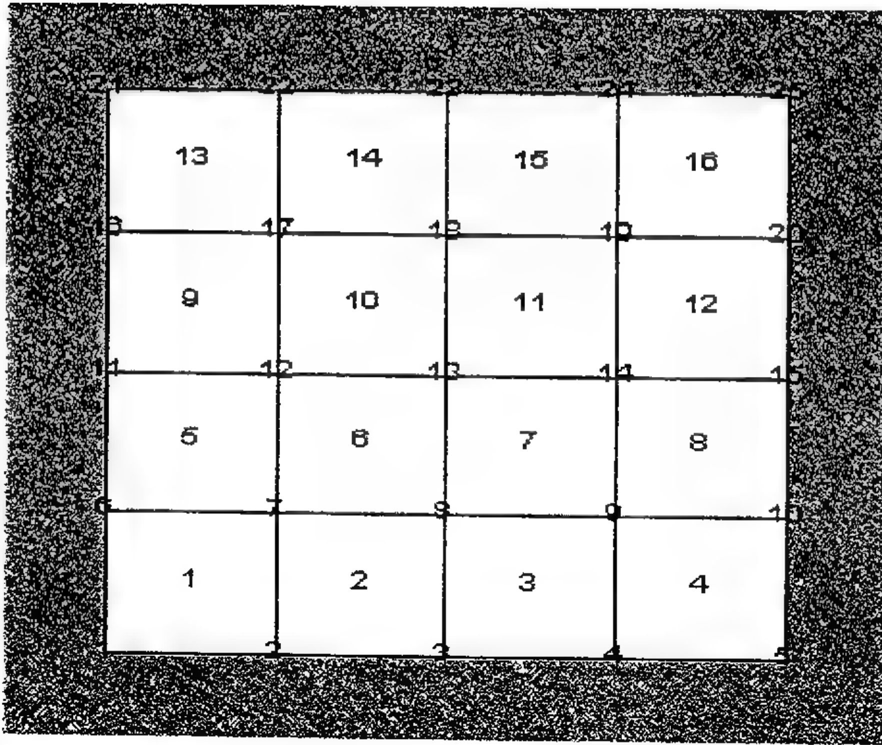
واستخدمنا لتقريب درجة الحرارة طريقة Crank-Nicolson بمعنى $(\theta = 05)$.

الجدول (٦-١) يوضح قيم الحل التام والحل بالفروق المحددة عند بعض النقاط من المرجع السابق مع إضافة النتائج التي توصلنا لها باستخدام برنامج المبل والناتجة عن حل المسألة السابقة عددياً بطريقة العناصر المحددة عند الزمن t =1.0 .

node	exact	F.d	Error	F.e	error
1	0.2947	0.2911	0.0036	0.2962	-0.0015
6	0.2789	0.2755	0.0034	0.2804	-0.0015
11	0.2293	0.2266	0.0027	0.2306	-0.0013
16	0.1397	0.1381	0.0016	0.1405	-0.0008
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.2642	0.2609	0.0033	0.2656	-0.0014
12	0.2178	0.2151	0.0027	0.2192	-0.0014
17	0.1333	.01317	0.0016	0.1342	-0.0009
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
13	0.1811	0.1787	0.0024	0.1827	-0.0016
18	0.1127	0.1110	0.0017	0.1140	-0.0013
23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
19	0.0728	0.0711	0.0017	0.0747	-0.0019
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

جدول (٦-١)

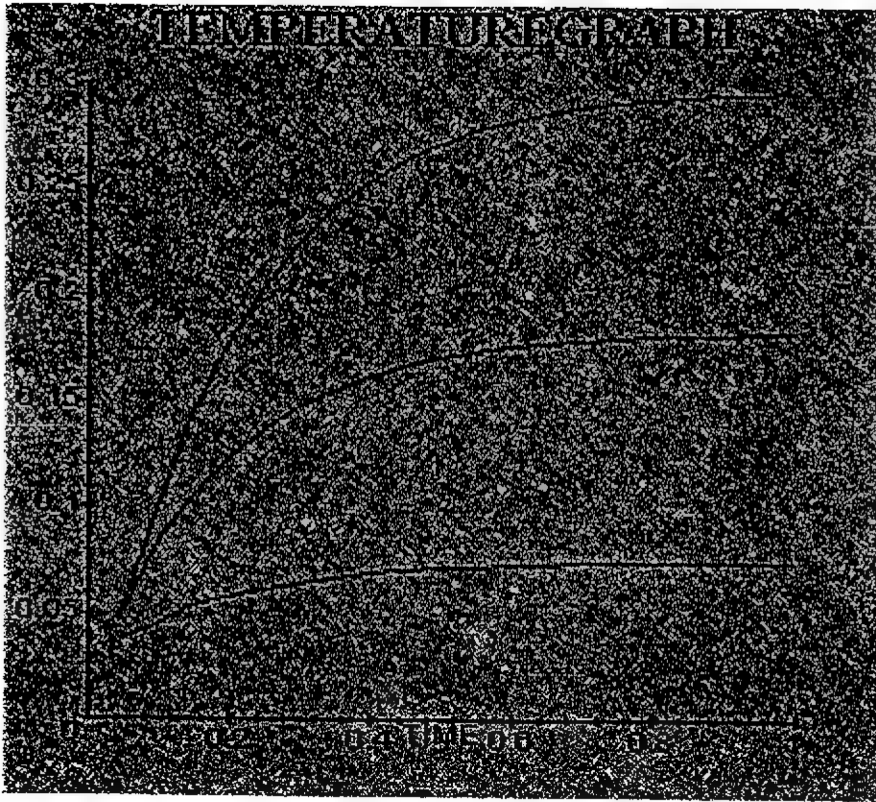
حددت النقاط (nodes) حسب ترقيم الشبكة في شكل (٦-٢) .



شكل (٦-٢)

الشبكة في شكل (٦-٢) رسمت بواسطة البرنامج (A) في ملحق [٢] ، وهو برنامج عمل بواسطة برنامج المبل وعمل بصورة عامة بحيث يمكنه تقسيم الشبكة وترقيمها حسب المعطيات الخاصة لأي مسألة مطلوب حلها بهذه الطريقة ومنه يتضح سهولة استخدام المبل للرسم بوجه عام .

الشكل (٦-٣) يعطى قيم الحرارة في أزمنة مختلفة عند نقاط معينة {١٩،١٣،١} وأيضا تم رسمه باستخدام المبل بشكل سهل ودقيق مقارنة بصعوبة عمل ذلك من خلال الفورتران بواسطة (nag library) لما في هذه الطريقة من صعوبة من حيث ضرورة التعامل مع برامج فرعية كثيرة تحتاج إلى وقت وجهد لمعرفة مدخلاتها ومخرجاتها .



شكل (٦-٣)

أيضا استخدم لرسم الشكل (٦-٣) البرنامج الفرعي (B) بواسطة المبل كما يتضح في الملحق [٢] ، ويمكن أيضا من خلال البرنامج استدعاء دالة (Spline) لرسم مثل المنحنى السابق وهذا يتضح من البرنامج(C) الموجود في ملحق [٢] .

٦-٣ النتائج والمقارنة بين برنامجي الفورتران والميل

ومن النتائج التي توصلنا إليها في الجدول (٦-١) تتطابق نتائج الميل مع نتائج الفورتران بدقة حوالي 7خانات عشرية ، ومن ناحية السرعة فيتفوق الفورتران فيها عن هذا البرنامج حتى في نسختنا الجديدة ، وهذا يتضح من الجداول (٥-٢)-(٥-٣) الخاصة بنتائج حل المسـألة ، بـالإضافة إلي جدول (٥-١) . ولقد قمنا بزيادة الدقة وذلك بمضاعفة (Digits) ثلاثة أضعاف ، لنصل إلي عدد تكـرارات قريبة من عـدد التكرارات الخاصـة بـالفورتران في طريقـة (Conjugate Gradient) فوجدنا زيادة في الزمن بمقدار ربع الزمن المستخدم تقريبا .

من هنا نجد إن الحصول على دقة عالية يتطلب زمن أطول وذاكرة أكبر، ولاحظنا أيضا التغير في النتيجة بزيادة الدقة إلى ثلاثة أضعاف تظهر بعد أربعة عشر خانة عشريـة ، ويمكـن تسريع حسابات الميل بعدة طرق :

- استخدام أمر اختياري يسمى (remember) يحفظ الكثير من الحسابات فـلا داعـي لعملها مرة أخرى إذا احتيج لها وهذا يظهر في التعامل مع المتسلسلات .
- استخدام حسابات (hardware) كما هو واضح في الفصل الثالث (٣-٨) وذلك بأمر (evalhf) إلا أن هذا الأمر يمتنع استخدامه مع العمليات (sets, list,symbolic) وأيضا مـع (array) إلا تحت تحويلات معينة .

ومن عيوب هذا البرنامج عدم إمكانية تشغيله من خارج البرنامج ، حتى انه يمتنع تشغيل برنامج ما بداخله من خلال نسخة سابقة .

على ضوء النتائج السابقة نترك للباحث وخاصة في مجال البرمجة العددية حق الاختيـار بين هذين البرنامجين ، فنجد قضية السرعة والتي ترتبط بالزمن مهمة في الحسابات الطويلة الـتي تتضمن أرقام مقسومة قد تتطلب في بعض البرامج ساعات طويلة في الفورتران فيصبح بالتـالي العمل على الميل ذا كلفة اقتصادية وزمنية على المستخدم ، وفي الحالات التي يتطلع المسـتخدم فيها إلي دقة عالية بسبب تعامله مع حسابات على أرقام صغيرة جدا فنجد تميز الميل في ذلك .

ويتفوق الميل على الفورتران من ناحية شيوع الاستخدام وسـهولته وبذلـك نوجـه المستخدم العادي من معلم أو طالب أو باحث في مادة علمية (غير متخصص في الرياضيـات) للاستفادة من إمكانيات الميل الهائلة فهو يعتبر مرجع جيد لصحة النتائج للمعلم والأستاذ الجامعي

في معظم التخصصات الرياضيـــة عددية أو رمزيـــة ويعتبر وسيلة لهم لانتقـــاء أفضل التمارين بالطريقة التي تناسب أهدافهم التعليمية ، وأجده ذا فائدة كبيرة للباحثين في مجالات علمية تحتاج إلى إيجاد جذور معادلات ذات درجات عاليـــة أو فك متطابقـــات ذات أسس كبيرة لما يوفره من وقت وصحة نتائج .

٦-٤ بعض التوصيات

نوصي بعمل دراسات مكثفة حول إمكانية جعله منهج أساسي لطالب المرحلة الجامعية في قسم الرياضيات والأقسام العلمية الأخرى وجعل البرامج التقليدية خاصة للباحثين في المجالات التي تحتاج إلى دراسة البرمجة العددية بتوسع إضافة إلى مثل هذا البرنامج الجيد .

أيضا نوصي بعمل دراســـة حول إمكانيـــة توفيره للاستخدام الشخصـــــــي ســـواء للمعلم أو الطالب أو الباحث ، وأخيرا نوصي بتتبع كل ما هو جديد أو معدل من البرمجيـــات الحديثة المتعلقة بالمجال الرياضي وعمل الدراسات اللازمة حولها .

ملحق [١]

EXAMPLE (1)

حـــل معـــادلة تفاضلية من الرتبة الأولى باستخدام المبل عن طريق الاستدعاء المباشر دون برمجة وذلك بأمر (dsolve) .

SOLVE THE EQUATION

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x}{x^2}$$

subject to y(1) =2

- إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية.

```
> gen_sol:=dsolve(diff(y(x),x)=((1+x)/x^2),y(x));

                         ln(x) x - 1 + _C1 x
    gen_sol := y(x) = ---------------------
                                 x
```

- إيجاد الحل الخاص الذي يحقق الشرط y(1) = 2.

```
> find_c:=subs({x=1,y=2},gen_sol);

    find_c := 2(1) = ln(1) - 1 + _C1
```

- إيجاد قيمة الثابت .

```
> solve(find_c,_C1);

                3
```

- التعويض عن قيمة الثابت في الحل العام .

```
> subs(_C1=3,gen_sol);

              ln(x) x - 1 + 3 x
    y(x) = ---------------------
                     x
```

EXAMPLE (2)

حل معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى $dy/dx = \sin(2x - y)$ باستخدام المبل .

NUMERICAL APPROXIMATION OF FIRST - ORDER EQUATION

- استخدام أمر (dsolve , numeric) لإيجاد حل عددي للمعادلة السابقة عند الشرط الابتدائي $y(0) = 0.5$.

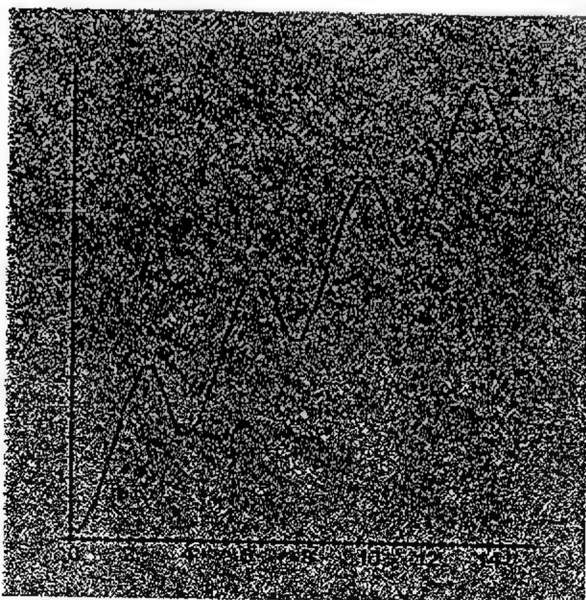
```
> eq:=D(y)(x)=sin(2*x-y(x)):
> sol_num:=dsolve({eq,y(0)=0.5},y(x),numeric):
```

- إيجاد قيمة الدالة y عند بعض قيم x .

```
> sol_num(1);
            [x = 1, y(x) = .8758947797345142]
> sol_num(0.87);
           [x = .87, y(x) = .7631495834479810]
> sol_num(1)[2];
                y(x) = .8758947895555634
```

-استخدام أمر (odeplot) من package(plots) والخاص للرسم مع الأمر (numeric) .

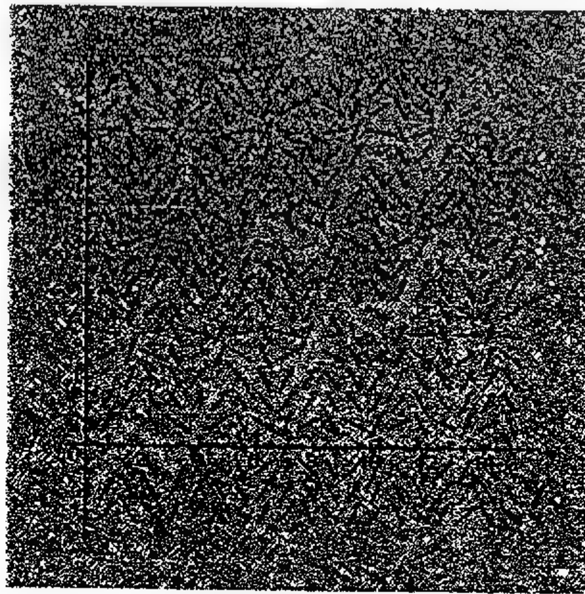
```
> with(plots):
>odeplot(sol_num,[x,y(x)],0..15);
```



EXAMPLE(3)

- استخدام أمر DEplot من package (DEtools) لرسم حلول المعادلة السابقة عند y(0) = 1
, y(0) = -1 مع الحقول الاتجاهية للمعادلة في الفترة [0,15] .

```
> with(DEtools):
> DEplot(diff(y(x),x)=sin(2*x-y),y(x),x=0..15,{[0,1],[0,-1]});
```



ملحق [٢]

(A)

برنامج عام لرسم شبكة توضح ترقيم العناصر بداخلها والنقاط على تقاطعاتها حسب موضـــع النقطة والعنصر لأي مسألة معطاة باستخدام المبل .

```
> squares:=proc(m,n) local i,j,point;
point:=seq(seq(evalf([[i/m,j/n],[(i+1)/m,j/n],[(i+1)/m,(j+1)/n],[i/m,(j+1)/n]]),
i=0..m-1),j=0..n-1): POLYGONS(point):end:
>PLOT(squares(len,wid),AXESSTYLE(NONE),seq(TEXT([coord[i,1],
coord[i,2]],convert(data1[i],name)),i=1..nnode),seq(TEXT([(coord[node[i,1],1]
+coord[node[i,3],1])/2.0, (coord[node[i,1],2]+coord[node[i,3],2])/2.0],
convert(data2[i],name)),i=1..nelem));
```

(B)

- برنامج لرسم قيمة الحرارة في أزمنة مختلفة عند نقاط معينة باستخدام المبل .

```
> plot1_temperture:=proc() local i,k,ax,ay; global pp;
for i from 1 to nplot do for k from 1 to nstep do ax[k]:=evalf(dt*k):
ay[k]:=evalf(U_PLOT[k,i]):od: pp[i]:=PLOT(CURVES([[ax[n] ,ay[n]]
$n=1..nstep]),TITLE(TEMPERATUREGRAPH)
,COLOUR(RGB,1.0,0.0,0.0),TEXT([0.0,0.5],"TEMP",ALIGNLEFT),
TEXT([0.5,0.0],"TIME",ALIGNBELOW), VIEW(0..1,0..1)):od:end:
> plot1_temperture():
> plots[display]([pp[n] $n=1..nplot]);
```

(C)

- برنامج لرسم قيمة الحرارة في أزمنة مختلفة عند نقاط معينة باستخدام دالة (Spline)

```
> plot2_temperture:=proc() local i,k,ax,ay; global p;
for i from 1 to nplot do for k from 1 to nstep do ax[k]:=evalf(dt*k):
ay[k]:=evalf(U_PLOT[k,i]):od:
> readlib(spline):
> p[i]:=plot(spline([ax[n] $n=1..nstep],[ay[n]
$n=1..nstep],time,cubic),time=0.05..dt*nstep,TEM=0..1,
color=blue,title=`TEMPERATURE GRAPH`): od:end:
> plot2_temperture():


> plots[display]([p[n] $n=1..nplot]);
```

المراجع

REFERENCES

ABELL,M.L.,BRASELTON,J.P., 1994[A]
"The Maple v Handbook",by Academic Press,Inc.

ABELL,M.L.,BRASELTON,J.P., 1994[B]
"Differential Equations with The Maple v ",by Academic Press,Inc.

ALFELALI, A.S., 1988
"Numerical Method for a Two-phase Two- Dimensional Stefan Problem using a Personal Computer " ,Ph.D.Thesis.

BRAGG,L.R.,CAHLON,B., 1994
"Analytic Approximation Solution of Differential Equations" ,OPA(Overseas Publishers Association),vol.26,pp. 11-40 .

BURNETT, D.S., 1987
"Finite element analysis from concepts to applications" , (Addison-Wesley) .

CHAR,B.W.,GEDDES,K.O.,GONNET,G.H.,LEONG,B.L., MONAGAN,M.B.,WATT,S.M., 1992
"First Leaves: a Tutorial Introduction to Maple v ",Springer-Verlag.

COMINI, G., DEL GIUDICE, S. , 1976
"Thermal Aspects of Cryosurgery", J.of Heat Transfer, PP. 543-7-49.

CORLESS, R.M., 1995
"Eessential Maple An Introduction for Scientific Programmers", Springer-Verlag new york Inc .

CRANK, J., 1984
"Free and Moving Boundary Problems", Clarendon Press, Oxford .

DAVIES, A.J., 1980
"The Finite Element Method: a First Approach",Clarendon Press, Oxford .

FIEDLER, M., 1986
"Special Matrices and their Application in Numerical Mathematical", Martinus Nijhoff Publishers.

HEAL,K.M.,HANSEN,M.L.,RICKARD,K.M., 1996
"Maple v , Learning Guide ", Waterloo Maple Inc.

HILL, J.M., 1987
"One Dimensional Stefan Problems: An Introduction", Pitman Monographs & Surveys in Pure & Applied Mathematics 31.

JENNINGS, A., 1977
"Matrix Computation for Engineers & Scientists", Wiley .

**MAJAESS,F.,KEAST,P.,
FAIRWEATHER,G.,BENNETT,K.R., 1992 [A]**
"Algorithm 704: ABDPACK and ABBPACK- Fortran Programs for The Solution of Almost Block Diagonal Linear Systems Arising in Spline Collocation at Gaussian Points with Monomial Basis Functions ", ACM Transactions on Mathematical Software , vol. 18 ,No.2,pages 205-210.

**MAJAESS,F.,KEAST,P.,
FAIRWEATHER,G.,BENNETT,K.R., 1992 [B]**
" The solution of Almost Block Diagonal Linear Systems Arising in Spline Collocation at Gaussian Points with Monomial Basis Functions", ACM Transactions on Mathematical Software , vol. 18,No.2 , pages 193-204.

PC. MAGAZINE, 1996
Vol.2,Issue 8,page 30 .

PC. MAGAZINE, 1997
Vol.3,Issue 5, page 31.

REDDY, J.N., 1985
"An Introduction to The Finite Element Method", Mc Graw-Hill.

REID, J.K., 1971
"On the method of Conjugate Gradients for the solution of large sparse systems of linear equations" In'Large Sparse Set of Linear Equations', (edited by J.K.Reid) Academic press , PP-231-53.

SCHRYER, N.L, 1990
"Designing Software for One Dimensional Partial Differential Equations"
ACM Transactions on Mathematical Software, vol.16, No.1, Pages 72-85.

SMITH, G.D., 1978
"Numerical Solution for Partial Differential Equations: Finite Difference Method"
Clarendon Press, Oxford.

ZIENKIEWICZ, O.C., MORGAN, K., 1982
"Finite Elements and Approximation", Awiley-Inter Science Publication.

استخدم البرنامج

Maple v

مرفق معه ثلاثة كتب

Maple v handbook
Learning guide
Programming guide

من شركة

Waterloo maple.Inc .450 Phillip street, Waterloo,on,
Canada N2L5J2
Phone: (519)747-2373
Fax : (519)747-5284

المراجع العربية

د.محمد حسن ، أ.د عدنان نوح (١٩٩٢)

" تطبيقات الحاسب بلغة الفورتران" ، دار المريخ للنشر

د. يوسف بطرس (١٩٨٢)

" التحليل العددي وتطبيقاته في الحاسبات الإلكترونية " ، دار المعارف